

Řešení úloh na cyklometrické funkce

Pro studenty učitelství matematiky

Zadání úloh

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arccos(x - 2x^2)$ a nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí.
 2. Určete definiční obor a obor hodnot funkce z předchozí úlohy.
-

Řešení úlohy 1: Definiční obor a monotonie

1. Definiční obor

Funkce $y = \arccos(u)$ je definována pro $u \in [-1, 1]$. Pro naši funkci $f(x) = \arccos(x - 2x^2)$ tedy musí platit:

$$-1 \leq x - 2x^2 \leq 1$$

Tuto podmínku rozdělíme na dvě nerovnice:

a) Pravá část nerovnosti:

$$x - 2x^2 \leq 1 \implies -2x^2 + x - 1 \leq 0 \implies 2x^2 - x + 1 \geq 0$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$. Protože $D < 0$ a koeficient u x^2 je kladný ($a = 2$), parabola leží celá nad osou x . Nerovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

b) Levá část nerovnosti:

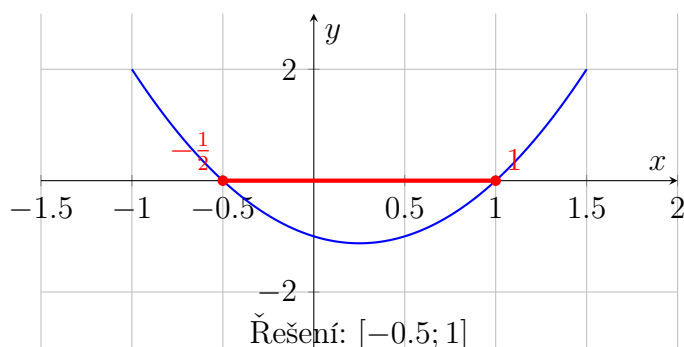
$$-1 \leq x - 2x^2 \implies 2x^2 - x - 1 \leq 0$$

Hledáme kořeny rovnice $2x^2 - x - 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Kořeny jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = -\frac{1}{2}$. Jde o parabolu otevřenou nahoru, záporné hodnoty nabývá mezi kořeny.

Graf pomocné funkce $g(x) = 2x^2 - x - 1$



Závěr: Definiční obor je průnikem řešení obou nerovnic:

$$D_f = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$$

2. Monotonie funkce

Pro určení intervalů monotonie budeme diskutovat dva možné postupy.

Varianta A: Užití diferenciálního počtu

Využijeme následující větu o vztahu derivace a monotonie:

Věta (O monotonii a derivaci). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu I a má derivaci v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Jestliže pro všechna $x \in \text{int}(I)$ platí $f'(x) > 0$, pak je funkce f na intervalu I rostoucí.*

Derivujeme funkci $f(x) = \arccos(x - 2x^2)$ jako složenou funkci:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - 2x^2)^2}} \cdot (1 - 4x) = \frac{4x - 1}{\sqrt{1 - (x - 2x^2)^2}}$$

Jmenovatel je (na vnitřku definičního oboru) vždy kladný (definiční obor funkce $\arccos(u)$ je $u \in [-1, 1]$, výraz v derivaci ve jmenovateli pod odmocninou $1 - u^2$ je pro $u \in (-1, 1)$ kladný). O znaménku derivace tedy rozhoduje čítec:

$$f'(x) > 0 \iff 4x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{4}$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalu, kde $x \in D_f$ a zároveň $x > \frac{1}{4}$, tedy na intervalu $(1/4, 1]$. Vzhledem ke spojitosti funkce f můžeme do intervalu přidat i jeho krajní bod $x = 1/4$. Dostaneme výsledek:

$$\text{Funkce } f \text{ je rostoucí na intervalu: } \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

Varianta B: Užití monotonie složené funkce

Tento postup je vhodný, pokud zkoumáme funkci složenou z funkcí, jejichž monotonii známe.

Věta (O monotonii složené funkce). *Nechť $u = g(x)$ je funkce ryze monotónní na intervalu I a $y = h(u)$ je funkce ryze monotónní na intervalu J takovém, že $g(I) \subset J$.*

- *Mají-li funkce g a h stejný typ monotonie (obě rostoucí nebo obě klesající), je složená funkce $y = h(g(x))$ rostoucí.*
- *Mají-li funkce g a h opačný typ monotonie, je složená funkce $y = h(g(x))$ klesající.*

Rozložíme funkci $f(x) = h(g(x))$:

- Vnitřní funkce $g(x) = x - 2x^2$. Vrchol paraboly je v bodě $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$.
 - Na intervalu $[-1/2; 1/4]$ je $g(x)$ **rostoucí**.
 - Na intervalu $[1/4; 1]$ je $g(x)$ **klesající**.
- Vnější funkce $h(u) = \arccos(u)$ je na svém definičním oboru **klesající**.

Analýza: Hledáme, kde je $f(x)$ rostoucí. Podle věty to nastane tam, kde mají vnitřní a vnější funkce **stejný** typ monotonie. Protože vnější funkce je klesající, hledáme interval, kde je i vnitřní funkce klesající. To odpovídá intervalu $[1/4; 1]$.

Řešení úlohy 2: Obor hodnot a graf

Obor hodnot

Vnitřní funkce $g(x) = x - 2x^2$ na definičním oboru $D_f = [-0.5; 1]$ nabývá:

- Maxima ve vrcholu $x = 1/4$: $g(1/4) = \frac{1}{4} - 2(\frac{1}{16}) = \frac{1}{8}$.
- Minima v krajních bodech (funkce je symetrická kolem vrcholu, ale interval nikoliv, musíme ověřit): $g(-0.5) = -0.5 - 2(0.25) = -1$. $g(1) = 1 - 2(1) = -1$.

Obor hodnot vnitřní funkce je $H_g = [-1; 1/8]$. Nyní aplikujeme vnější funkci $\arccos$. Protože $\arccos$ je klesající, minimum $f(x)$ bude v bodě maxima vnitřní funkce a naopak:

- $f_{\min} = \arccos(1/8) \approx 1,445$ rad
- $f_{\max} = \arccos(-1) = \pi$ rad

$$H_f = [\arccos(1/8); \pi]$$

Alternativní řešení oboru hodnot pomocí derivace

Pro určení oboru hodnot H_f spojitě funkce na uzavřeném intervalu $D_f = [-1/2; 1]$ nalezneme globální extrémy. Ty se mohou nacházet buď ve stacionárních bodech (kde $f'(x) = 0$), nebo v bodech, ve kterých funkce není diferencovatelná nebo v krajních bodech intervalu.

Funkce je diferencovatelná ve všech vnitřních bodech definičního oboru $(-1/2, 1)$, proto budou extrémy buď ve stacionárním bodě, nebo v krajním bodě definičního oboru.

1. Hledání stacionárních bodů: Využijeme derivaci vypočtenou v první úloze:

$$f'(x) = \frac{4x - 1}{\sqrt{1 - (x - 2x^2)^2}}$$

Stacionární bod nalezneme položením $f'(x) = 0$. Zlomek je roven nule, právě když je roven nule jeho čítec (a jmenovatel je nenulový):

$$4x - 1 = 0 \implies x_0 = \frac{1}{4}$$

Bod $x_0 = \frac{1}{4}$ leží uvnitř definičního oboru $[-1/2; 1]$.

2. Výpočet funkčních hodnot: Vyčíslíme funkci $f(x)$ ve stacionárním bodě a v krajních bodech definičního oboru:

- **Stacionární bod** $x_0 = \frac{1}{4}$:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{4} - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \arccos\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$$

- **Levý krajní bod** $x_1 = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \arccos(-1) = \pi$$

- **Pravý krajní bod** $x_2 = 1$:

$$f(1) = \arccos(1 - 2 \cdot 1) = \arccos(-1) = \pi$$

3. Závěr: Porovnáním nalezených hodnot určíme globální minimum a maximum:

$$\min f(x) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right), \quad \max f(x) = \pi$$

Jelikož je funkce f na intervalu spojitá, nabývá všech hodnot mezi minimem a maximem. Obor hodnot je tedy:

$$H_f = \left[\arccos\left(\frac{1}{8}\right); \pi\right]$$

Graf funkce $f(x)$

Graf funkce $f(x) = \arccos(x - 2x^2)$

