Vzorové řešení: Nalezení oboru hodnot funkce

Zadání: Určete obor hodnot funkce $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}}$.

1. Určení definičního oboru a úprava předpisu

Nejprve určíme definiční obor funkce f. Protože exponenciální funkce e^x je vždy kladná pro každé $x \in \mathbb{R}$, jmenovatel zlomku $e^x + e^{2x} + e^{3x}$ je vždy ostře větší než nula. Zlomek je tedy definován pro všechna reálná čísla.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Pro usnadnění derivování a limitních přechodů si předpis funkce vhodně upravíme. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem e^{2x} (což je ekvivalentní vytknutí a zkrácení). Protože $e^{2x} > 0$, jedná se o ekvivalentní úpravu:

$$f(x) = \frac{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{e^{3x}}{e^{2x}}} = \frac{1}{e^{-x} + 1 + e^x}$$

2. Vyšetření monotonie pomocí první derivace

K určení extrémů a chování funkce na intervalech využijeme první derivaci. Funkce f je složením a podílem diferencovatelných funkcí, proto ji můžeme derivovat na celém $\mathbb{R}$.

Podle pravidla pro derivaci složené funkce dostáváme:

$$f'(x) = -1 \cdot (e^{-x} + 1 + e^x)^{-2} \cdot (-e^{-x} + e^x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^{-x} + 1 + e^x)^2}$$

Nyní zjistíme, kde je $f'(x) = 0$, kde je $f'(x) > 0$ a kde $f'(x) < 0$. Jmenovatel zlomku je vždy kladný, o znaménku derivace tedy rozhoduje pouze čitatel. **Při řešení následujících nerovnic** (přechod od exponenciály k exponentům) využijeme faktu, že **exponenciála** exp **je na celém** $\mathbb{R}$ **rostoucí**. Právě z toho důvodu se zachovává směr nerovnosti:

- $f'(x) = 0 \iff e^{-x} - e^x = 0 \iff e^{-x} = e^x \iff -x = x \iff x = 0$
- $f'(x) > 0 \iff e^{-x} - e^x > 0 \iff e^{-x} > e^x \iff -x > x \iff x < 0$
- $f'(x) < 0 \iff e^{-x} - e^x < 0 \iff e^{-x} < e^x \iff -x < x \iff x > 0$

Zde se odvoláme na **Větu o vztahu znaménka derivace a monotonie funkce**:

> *Nechť je funkce f spojitá na intervalu I a má na jeho vnitřku kladnou (resp. zápornou) derivaci. Pak je funkce f na intervalu I rostoucí (resp. klesající).*

Z této věty vyplývá, že:

- Funkce f je **rostoucí** na intervalu $(-\infty, 0]$.
- Funkce f je **klesající** na intervalu $[0, \infty)$.

Z toho zároveň plyne, že v bodě $x = 0$ nabývá funkce svého globálního maxima. Jeho hodnota je:

$$f(0) = \frac{1}{e^0 + 1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

3. Chování funkce v krajních bodech intervalů (limity)

Abychom zjistili, jakých hodnot funkce nabývá, potřebujeme znát její limity v nevlastních bodech. Při výpočtu se opíráme o **Větu o aritmetice limit** (limita součtu je součet limit, limita podílu je podíl limit atd.). Tuto větu ovšem nemůžeme aplikovat na původní tvar zadání pro $x \to \infty$, neboť bychom obdrželi neurčitý výraz $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Právě proto využijeme upravený tvar z prvního kroku, kde se neurčitému výrazu vyhneme a větu o aritmetice limit můžeme korektně použít (limity jednotlivých sčítanců ve jmenovateli existují a limita jmenovatele je nenulová):

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-x}+1+e^{x}} = \left[\frac{1}{0+1+\infty}\right] = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}+1+e^{x}} = \left[\frac{1}{\infty+1+0}\right] = 0$

4. Určení oboru hodnot

K přesnému stanovení oboru hodnot se nyní opřeme o **Větu o obrazu intervalu spojitou funkcí** (která je důsledkem Bolzanovy věty o mezihodnotách):

> *Nechť je funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I (případně otevřeném či polouzavřeném, včetně nevlastních mezí). Pak obrazem tohoto intervalu je opět interval, jehož meze jsou dány limitami (či funkčními hodnotami) funkce f v krajních bodech původního intervalu.*

Aplikujeme tuto větu na dva intervaly monotonie z kroku 2:

1. Na intervalu $I_1 = (-\infty, 0]$ je funkce f spojitá a rostoucí. Její obraz je interval $f(I_1) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = \left(0, \frac{1}{3}\right]$.
2. Na intervalu $I_2 = [0, \infty)$ je funkce f spojitá a klesající. Její obraz je interval $f(I_2) = (\lim_{x\to\infty} f(x), f(0)] = \left(0, \frac{1}{3}\right]$.

Celkový obor hodnot $H(f)$ je sjednocením dílčích oborů hodnot:

$$H(f) = f(I_1) \cup f(I_2) = \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(0, \frac{1}{3}\right] = \left(0, \frac{1}{3}\right]$$

Závěr: Obor hodnot dané funkce je $H(f) = \left(0, \frac{1}{3}\right]$.

Kontrolní a metodické otázky pro studenty

Tato sada otázek slouží k ověření, zda studenti neprovádějí výpočet pouze mechanicky, ale zda rozumí teoretickým předpokladům a použitým větám.

1. **Úprava výrazu a limity:** Proč jsme nemohli použít *větu o aritmetice limit* rovnou na původní zadání $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}}$ při výpočtu limity pro $x \to \infty$? Co přesně by použití této věty v daném případě bránilo?

2. **Derivace a úpravy:** Při derivování jsme využili upravený tvar $\frac{1}{e^{-x}+1+e^x}$ místo pravidla pro derivaci podílu na původní zlomek. Zkuste zderivovat původní zlomek. Je výsledek stejný? Proč je první způsob (s upraveným tvarem) méně náchylný k numerickým chybám studentů?

3. **Vlastnosti elementárních funkcí:** Při řešení nerovnice $e^{-x} > e^x$ jsme přešli k nerovnici $-x > x$. Zkuste tuto úvahu aplikovat na funkci $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Bude platit, že z nerovnosti $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^x$ plyne $-x > x$? A proč?

4. **Předpoklady vět:** Věta o vztahu znaménka derivace a monotonie předpokládá spojitost funkce na daném intervalu. Zkuste uvést příklad funkce $g(x)$, pro kterou platí $g'(x) > 0$ ve všech bodech definičního oboru, ale přesto tato funkce *není* na svém definičním oboru rostoucí. (Nápověda: uvažujte funkci s nespojitostí, např. $y = -\frac{1}{x}$).

5. **Bolzanova věta v praxi:** Pokud bychom vynechali krok 2 (monotonie) a znali jen hodnotu v bodě $x = 0$ a limity v nekonečnech, proč by z Bolzanovy věty o mezihodnotách ještě nevyplývalo, že $H(f) = \left(0, \frac{1}{3}\right]$? Co by se mohlo s grafem funkce teoreticky dít, kdybychom nevěděli, že je na daných intervalech ryze monotonní?

6. **Druh monotonie bez řešení nerovnice:** Jak zdůvodníte, že je funkce f monotonní na intervalech $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$ aniž byste řešili nerovnice $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$ jen ze znalosti kořenů rovnice $f'(x) = 0$?

7. **Alternativní řešení (algebraické):** Obor hodnot lze nalézt i bez použití derivací. Zkuste zavést substituci $t = e^x$ (přičemž $t > 0$) a řešit rovnici $\frac{t^2}{t+t^2+t^3} = y$ s parametrem y pro neznámou t. Jaké podmínky musí splňovat parametr y, aby tato kvadratická rovnice měla alespoň jedno kladné reálné řešení? Vede tento postup ke stejnému oboru hodnot?