Písemná část zkoušky z PAN2/KAN2

5. června 2026

1. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$$f(x) = (x^2 + 4x + 2)\exp(2x)$$

1* Určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $f(x) = y$ právě tři různé kořeny x_1, x_2, x_3.

2. Pro funkce f, g určete definiční obor. Dále určete body nespojitosti těchto funkcí – v kterých bodech, jakého druhu a u typu skok i výšku skoku.

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right), \qquad g(x) = x\log(x^4)$$

2*

$$f(x) = \frac{2}{\operatorname{arctg}(x)} \qquad g(x) = \frac{x}{\log(x^4)}$$

3. Určete, které z následujících řad absolutně konvergují

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{1+3k}}{3^{1+2k}}$$

3* Určete, které z následujících řad konvergují absolutně a které konvergují neabsolutně (první dvě jsou stejné jako v příkladu 3, třetí se liší)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-2^{3k}}{1+3^{2k}}$$

4. Vypočtěte Newtonův a Riemannův integrál

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^4 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

4* Navíc hodnotu integrálu odhadněte tím, že na každém intervalu, na kterém je funkce monotonní, nahradíte graf funkce úsečkou a vypočtete obsah lichoběžníku/trojúhelníku mezi touto úsečkou a osou x. Oba výsledky, přesný z příkladu 4 i přibližný z příkladu 4*, pak vyčíslete s přesností na desetiny.

5. [1] K funkcím f, g nalezněte funkce primitivní na vámi vhodně zvoleném intervalu a udělejte zkoušku

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}}, \qquad g(x) = (4x + 8)\exp(2x)$$

5* K funkcím f, $\tilde{g}$, kde f, g jsou z příkladu 5 a $\tilde{g}$ je

$$\tilde{g}(x) = 2x\, g(x^2)$$

[1] Pokud jste úspěšně zvládli test z integrálů během semestru, máte již bod za tento příklad. Pokud chcete za přáklad bod a půl, spočítejte primitivní funkci k $\tilde{g}$ z příkladu 5*.