Písemná část zkoušky z PAN2/KAN2

11. června 2026

1. Nalezněte kořeny funkce f na periodě $I_0 = [0, 2\pi]$. Poté zvolte periodu I s krajními body v některých kořenech a na této periodě řešte nerovnice $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

$$f(x) = \sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)$$

1* Řešte stejnou úlohu pro funkci $\tilde{f}$, kde

$$\tilde{f}(x) = (f(x))^3$$

2. Pro funkce f, g určete definiční obor. Dále určete body nespojitosti těchto funkcí – v kterých bodech, jakého druhu a u typu skok i výšku skoku.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1/x^2) \qquad g(x) = \frac{\exp(3/x)}{\exp(1/x) + \exp(2/x) + \exp(3/x)}$$

2* Řešte stejnou úlohu pro funkci h, kde

$$h(x) = f(x)g(x)$$

3. Pro následující řady
   (a) Určete, zda splňují nutnou podmínku konvergence.
   (b) Určete, co ze splnění či nesplnění nutné podmínky konvergence plyne pro konvergenci řady.
   (c) Určete, zda řada konverguje.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 1}{\sqrt{k^6 + 3k^2 + 5} - 4k^2} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^{k-1}}{2^{3k+1}}$$

3* Řešte stejnou úlohu pro řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{k^6 + 3k + 5} - k^3}$$

4. Vypočtěte Newtonův a Riemannův integrál

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

4* Navíc hodnotu integrálu odhadněte tím, že na každém intervalu, na kterém je funkce monotonní, nahradíte graf funkce úsečkou a vypočtete obsah lichoběžníku/trojúhelníku mezi touto úsečkou a osou x. Oba výsledky, přesný z příkladu 4 i přibližný z příkladu 4*, pak vyčíslete s přesností na desetiny.

5. K funkcím f, g nalezněte funkce primitivní na vámi vhodně zvoleném intervalu a udělejte zkoušku

$$f(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}, \qquad g(x) = (2x^2 - 2x)\exp(2x)$$

5* K funkcím f, $\tilde{g}$, kde f, g jsou z příkladu 5 a $\tilde{g}$ je

$$\tilde{g}(x) = 3x^2\, g(x^3)$$