

Náročné úlohy z PAN2/KAN2/CAN2M

8. února 2026

Soubor zatím obsahuje pět úloh. V průběhu semestru mohou být přidány další úlohy.

1. Popište konstrukci pravidelného pětiúhelníku bez použití úhloměru a dokažte správnost této konstrukce.
2. Zjistěte, zda existují limity a případně vypočtěte jejich hodnotu.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\operatorname{sgn}(x))$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(\sin^2(x))$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x^2 \sin(1/x^2))$

3. Necht' s, c jsou funkce definované na $\mathbb{R}$ a necht' splňují (i), (ii). Ukažte, že jsou pak buď identicky rovny nule, nebo platí $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$

Návod: dosad'te do vlastností $y = 0$ a použijte vhodné kritérium řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.

4. Necht' s, c jsou funkce definované na $\mathbb{R}$. Ukažte, že tyto funkce splňují (i), (ii), (iii), (iv) právě když splňují (i'), (ii'), (iv). Vlastnosti (i), (ii) vemte z předchozí úlhy.

(i') $\forall x, y \in \mathbb{R} : s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$

(ii') $\forall x, y \in \mathbb{R} : c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} : s^2(x) + c^2(x) = 1$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$

5. Ukažte, že funkce f má v nule derivace všech řádů a platí $f^{(n)}(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$