Příklady do písemné zkoušky z AN3

4. prosince 2023

1a Načrtněte vrstevnice funkcí f, g procházející bodem $B = [3, 1]$. Vypočtěte gradienty $\nabla f(B)$, $\nabla g(B)$ a umístěte je do bodu B.

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 \qquad g(x, y) = x - 2y$$

1b

$$B = [1, 2], \qquad f(x, y) = xy, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2$$

1c

$$B = [3, 2], \qquad f(x, y) = x^2 - y^2, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$$

1d

$$B = [3, 2], \qquad f(x, y) = x + y^2, \qquad g(x, y) = x^2 + 4x + y^2$$

2. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A = [1, -2]$.

$$f(x, y) = \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

3. Napište Taylorův polynom stupně jedna funkce f v bodě $A = [1, -2]$.

$$f(x, y) = \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

4. Vypočtěte obě smíšené derivace druhého řádu funkce f v bodě $A = [-2, 1]$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x + y}$$

5a Vypočtěte limity funkce f v bodě $A = [0, 0]$ po všech přímkách. Co lze z výsledků usoudit o existenci limity funkce f v bodě A?

$$\frac{xy^2 - 3x^2y}{x^2 + y^6}$$

5b

$$f(x, y) = \frac{x^2y + xy^3}{x^2 + y^4}$$

6a Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda je možné ji spojitě rozšířit.

$$f(x,y) = \frac{x^2y - x^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

6b

$$f(x,y) = \frac{xy^2 - y^3}{(x+2)^2 + y^2}$$

7a Vypočtěte derivaci podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ funkce f v bodě $A = [0,0]$.

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7b Funkce stejná, bod $A = [1,0]$.

7c

$$f(x,y) = \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}, \quad A = [1,-2]$$

8a Vypočtěte Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce f v bodě A a zjistěte vzájemnou polohu jejich grafů v okolí bodu A (tj. jestli a který graf leží výš než druhý, nebo jestli se protínají).

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x + 2y - 3} \qquad A = [2,1]$$

8b

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \qquad A = [1,-2]$$

9a Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ.

$$f(x,y) = x^3 - xy + 2y - y^2$$

9b

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 32y$$

10. Otevřený válcový sud s objemem 120 litrů se bude vyrábět z dvojího plechu: na podstavu válce se užije materiál třikrát dražší než na jeho plášť. Jak se má zvolit poměr výšky h válce a poloměru r podstavy, aby cena celého sudu byla co nejmenší?

11a Na elipse s hlavními vrcholy $A[1, 2]$, $B[1, 5]$ a velikostí vedlejší poloosy $b = 1$ nalezněte minimální a maximální hodnotu funkce $f(x, y) = x + y$.

11b Zvolte jednu poloosu elipsy rovnoběžnou s některou ze souřadných os a velikost druhé poloosy. Funkci f zvolte lineární.

12a Načrtněte obrazec O, odhadněte polohu jeho těžiště a poté tuto polohu vypočtěte.

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

12b

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi/2] \wedge y \in [0, \sin(x)]\}$$

12c

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi] \wedge y \in [0, \sin(x)]\}$$

12d

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$$

12e

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi] \wedge y \in [\sin(x), \cos(x)]\}$$

13. Načrtněte obrazce O_1, O_2, odhadněte polohy jejich těžišt a poté vypočtěte polohu jednoho z těžišť.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq 4 + 2x - x^2\} \\ O_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi] \wedge y \in [\sin(x), \cos(x)]\} \end{aligned}$$

14a Určete polohu těžiště trojúhelníku A, B, C

(a) prostředky elementární geometrie

(b) pomocí integrálu

$$A = [0, 0] \quad B = [2, 2] \quad C = [1, 2]$$

14b

$$A = [0, 0] \quad B = [6, 3] \quad C = [3, 3]$$

15a Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

15b

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k}{2^k} x^k$$

15c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2k+1} x^k$$

15d

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{k^2 2^k} x^k$$

16a Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \exp(-nx), \qquad I = (0, +\infty)$$

16b

$$f_n(x) = \exp(-nx), \qquad I = (1, +\infty)$$

16c

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \qquad I = (0, +\infty)$$

16d

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \qquad I = (1, +\infty)$$

16e

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (0, 2\pi)$$

16f

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (0, \pi/3)$$

16g

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (-\pi/2, \pi/2)$$

16h

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad I = (-1, 1)$$

16i

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad I = (1, 2)$$