Úlohy k písemné části zkoušky z Matematické analýzy 3
20. prosince 2024
Definitivní verze

1a Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}, \qquad I = \mathbb{R}$$

1b

$$f_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}, \qquad I = \mathbb{R}$$

1c

$$f_n(x) = \exp(-nx), \qquad I = (0, +\infty)$$

1d

$$f_n(x) = \exp(-nx), \qquad I = (1, +\infty)$$

1e

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)}, \qquad I = \mathbb{R}$$

1f

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (0, 2\pi)$$

1g

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (0, \pi/3)$$

1h

$$f_n(x) = \sin^n(x), \qquad I = (-\pi/2, \pi/2)$$

1i

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \qquad I = (0, +\infty)$$

1j

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \qquad I = (1, +\infty)$$

1k

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \qquad I = (-1, 1)$$

1l

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \qquad I = (1, 2)$$

1m

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}, \qquad I = (-1,2)$$

2a Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2b

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k2^k}$$

2c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5x^k}{k^2 3^k}$$

2d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

2e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

2f

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3a Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady. Pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která diverguje?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

3b

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$$

3c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

3d
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$$

3e
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n + 4^n}$$

3f
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + n^2 + n^3 + n^4}$$

3g
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

4a Sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{6^n}$$

4b
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

4c
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{4^n}$$

5a Vypočtěte limity
$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1^-} x^n \right), \qquad \lim_{x\to 1^-} \left(\lim_{n\to\infty} x^n \right)$$

5b
$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 0} \exp(-nx^2) \right), \qquad \lim_{x\to 0} \left(\lim_{n\to\infty} \exp(-nx^2) \right)$$

5c Nechť $s_n(x) = \frac{x}{\exp(nx^2)}$ je posloupnost funkcí. Vypočtěte derivaci s_n' a bodové limity posloupností s_n i s_n'. Dále určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x) \right)'$$

5d Totéž pro funkce (zde jsou s_n funkce z předchozí úlohy).

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (s_n(x) - s_{n-1}(x))$$

6a Odvoďte koeficienty Taylorovy řady funkce $f(x) = \exp(x)$ se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete její poloměr konvergence.

6b $f(x) = \sin(x)$, střed v bodě $x_0 = 0$

6c $f(x) = \cos(x)$, střed v bodě $x_0 = 0$

7a Vypočtěte limitu posloupnosti

$$a_n = (x_n, y_n) := \left(\frac{n^2}{2 - 3n^2}, \frac{(-1)^n n}{3 + n - n^3} \right)$$

po složkách, tedy limity

$$a := \left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n \right)$$

a ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \varrho_{eukl})$ je

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_{eukl}(a_n, a) = 0$$

7b

$$a_n := \left(\frac{(-1)^n n^2}{(n+2)^3}, \frac{(2n-1)^2 + 3}{(n+3)^2} \right)$$

8a Ukažte, že v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, \varrho_{eukl})$

otevřený interval (a, b) je otevřená množina,

8b otevřený interval (a, b) není uzavřená množina,

8c polouzavřený interval $[a, b)$ není otevřená množina.

8d polouzavřený interval $[a, b)$ není uzavřená množina.

8e uzavřený interval $[a, b]$ je uzavřená množina.

8f uzavřený interval $[a, b]$ není otevřená množina.

8g pro $x \in \mathbb{R}$ je $A := \{x\}$ uzavřená množina.

8h pro $x \in \mathbb{R}$ množina $A := \{x\}$ není otevřená.

8i množina $A := \{\}$ je otevřená.

8j množina $A := \{\}$ je uzavřená.

9a Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) ukažte, že

pro $x \in M$ je množina $A := M \setminus \{x\}$ otevřená.

9b pro $x \in M$, $r > 0$ je okolí $B(x, r)$ otevřená množina.

9c M je otevřená množina.

9d $\emptyset$ je otevřená množina.

10a Dokažte de Morganův vzorec

$$M \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha),$$

10b

$$M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha),$$

11a Vypočtěte limity po všech přímkách a řekněte, co z výsledku plyne pro limitu funkce dvou proměnných

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

11b

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

11c

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

12a Pro funkci f a bod $a = (-1, 3)$

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y}$$

(a) Vypočtěte derivaci ve směru $h = (h_1, h_2)$ v bodě a.

(b) Vypočtěte gradient $\nabla f(a)$ v bodě a.

(c) Co můžete na základě vypočteného říct o diferenciálu L funkce f v bodě a?

12b

$$a = (0,0), \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

13. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě a

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 3xy}{x + 2y}, \qquad a = (3,-1)$$

14. Napište Taylorův polynom prvního stupně funkce f v bodě a

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 3xy}{x + 2y}, \qquad a = (3,-1)$$

15a Napište Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě a

$$f(x,y) = \frac{x - 2y}{x + y}, \qquad a = (-1,2)$$

16a Nalezněte lokální extrémy funkce f a určete jejich typ

$$f(x,y) = x^2 - 2x + xy - y^3$$

16b

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 32x$$

17a Nalezněte body S funkce f, které splňují nutnou podmínku pro extrém $\nabla f(S) = (0,0)$ a napište Taylorův polynom druhého stupně funkce f v každém z těchto bodů.

$$f(x,y) = x^2 - 2x + xy - y^3$$

17b

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 32x$$

18. Na metrickém prostoru $(\mathbb{R}^3, \varrho)$ s euklidovskou metrikou ϱ sestavte pro body $A[-1,0,2]$, $B[1,1,0]$, $C[0,1,0]$, $D[1,1,1]$ funkci

$$f(t,s) = \varrho(A + t(B-A), C + s(D-C))$$

a nalezněte její lokální extrémy.

19. Vypočtěte vzdálenost mimoběžek AB, CD pro $A[-1, 0, 2]$, $B[1, 1, 0]$, $C[0, 1, 0]$, $D[1, 1, 1]$.

20. Sud bez víka má tvar válce s jednou podstavou. Materiál na jednotkovou plochu dna sudu je třikrát dražší než materiál na stejnou plochu pláště válce.

    Vypočtěte poměr výšky a průměru dna, aby pro zadaný objem sudu V byly náklady na materiál minimální.

21. Na elipse o rovnici $x^2 + 4y^2 = 4$ nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x + y$.

    Typ extrému zjistěte z náčrtku elipsy a vrstevnic funkce f.

22a Vypočtěte dvojný integrál funkce f na obdélníku $(x, y) \in [0, \pi/2] \times [0, 1]$.

$$f(x, y) = y \sin(xy)$$

22a Na obdélníku $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 3]$

$$f(x, y) = x \exp(xy)$$

Následující dvě úlohy jsem se nakonec rozhodla vyřadit z písemné části. Budeme se na ně ptát v ústní části.

1a Napište definici uzávěru množiny a ukažte, že v prostoru $(\mathbb{R}, \varrho_{eukl})$ je pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\overline{(a, b)} = [a, b]$$

1b

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

1c

$$\overline{[a, b]} = [a, b]$$

1d

$$\overline{[a, \infty)} = [a, \infty)$$

1e

$$\overline{(-\infty, b)} = (-\infty, b]$$

2a Napište definici vnitřku množiny a ukažte, že v prostoru $(\mathbb{R}, \varrho_{eukl})$ je pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\mathbb{Q}^o = \emptyset$$

2b

$$(a,b)^o = (a,b)$$

2c

$$[a,b]^o = (a,b)$$

2d

$$(a,b]^o = (a,b)$$

2e

$$[a,\infty)^o = (a,\infty)$$

2f

$$(-\infty,b)^o = (-\infty,b)$$