Písemná část zkoušky z AN3

24. ledna 2025

1. Vypočtěte bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu $I = [0, 1]$ a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}$$

1*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n} + 1}, \quad I = (1, \infty)$$

2. Sečtěte řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

2*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2^k}$$

3. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) a ukažte, že pro $x \in M$ je množina $A = M \setminus \{x\}$ otevřená.

3* Ukažte, že pro $a, b, c \in M$ je množina $M = \{a, b, c\}$ uzavřená množina v metrickém prostoru (M, ϱ).

4. Napište Taylorovy polynomy prvního a druhého stupně funkce f v bodě $a = (2, -1)$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x + y},$$

4* V kolika bodech se grafy těchto Taylorových polynomů protínají? Odpověď zdůvodněte.

5. Na elipse o rovnici $4x^2 + y^2 = 4$ nalezněte vázané lokální extrémy funkce $f(x, y) = x - 2y$. Typ extrému zjistěte z náčrtku elipsy a vrstevnic funkce f.

5* Na elipse nalezněte vázané extrémy funkce $g(x, y) = (x - 2y)^2$. V kolika bodech elipsy funkce g tyto extrémy nabývá?