Písemná část zkoušky z AN3

28. ledna 2025

1. Určete střed a poloměr konvergence mocninné řady. Pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která diverguje?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3+5^n}$$

1*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}(x+2)^n$$

2. Sečtěte řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$$

2*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{3^k}$$

3. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) a ukažte, že pro $x \in M$ je množina $A = M \setminus \{x\}$ otevřená.

3* Ukažte, že pro $a, b, c \in M$ je množina $M = \{a, b, c\}$ uzavřená množina v metrickém prostoru (M, ϱ).

4. Vypočtěte limity po všech přímkách a řekněte, co z výsledku plyne pro limitu funkce dvou proměnných

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

4*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

5. Nalezněte body S funkce f, které splňují nutnou podmínku pro extrém $\nabla f(S) = (0,0)$ a napište Taylorův polynom druhého stupně funkce f v každém z těchto bodů.

$$f(x,y) = x^2 - 2x + xy - y^3$$

5* Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce f v jednom z těchto bodů.