

Jsem student učitelství matematiky na univerzitě. Probíráme metrické prostory a to je hodně abstraktní látka. Potřebuji vysvětlit, jak dokázat, že okolí bodu je otevřená množina.

Ahoj, naprosto chápu. Metrické prostory jsou velký skok v abstraktním myšlení. Pojďme si ten důkaz rozebrat krok za krokem.

Nejprve si musíme ujasnit terminologii, protože "okolí bodu" může znamenat dvě věci:

1. **Otevřená koule:** Často se jako základní okolí bodu x bere přímo otevřená koule $B(x, r)$ s nějakým poloměrem $r > 0$.
2. **Jakákoli množina obsahující kouli:** Někdy se "okolí U bodu x " definuje jako *libovolná* množina, která *obsahuje* nějakou otevřenou kouli $B(x, r)$. V tomto případě ale okolí U nemusí být otevřená množina! (Např. v $\mathbb{R}$ je uzavřený interval $U = [-1, 1]$ okolím bodu 0, protože $U \supseteq B(0, 0.5) = (-0.5, 0.5)$, ale U sám není otevřená množina).

Vzhledem k tvému dotazu je téměř jisté, že máš na mysli ten první případ a chcete dokázat základní větu: **Každá otevřená koule je otevřená množina.**

Pojďme na to.

Klíčové definice

Než začneme, připomeňme si dvě definice v metrickém prostoru (M, d) :

- **Otevřená koule (Open Ball):** Koule se středem $x \in M$ a poloměrem $r > 0$ je množina $B(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$. (Jsou to všechny body, jejichž vzdálenost od x je *menší* než r).
- **Otevřená množina (Open Set):** Množina $A \subseteq M$ je **otevřená**, pokud pro *každý* bod $a \in A$ existuje nějaké $\epsilon > 0$ (malý poloměr) takové, že celá koule $B(a, \epsilon)$ leží uvnitř A (tj. $B(a, \epsilon) \subseteq A$).

Věta: Otevřená koule je otevřená množina

Co chceme dokázat: Necht' (M, d) je metrický prostor. Pro libovolný bod $x \in M$ a libovolný poloměr $r > 0$ je množina $B(x, r)$ otevřená.

Důkaz (krok za krokem)

Cílem je vzít si *libovolný* bod z naší "velké" koule $B(x, r)$ a ukázat, že se kolem něj dá nakreslit "malá" koule, která se celá vejde do té velké.

1. Cíl důkazu

Musíme ověřit definici otevřené množiny pro naši množinu $A = B(x, r)$. Musíme tedy ukázat, že: Pro *každý* bod $y \in B(x, r)$ existuje $\epsilon > 0$ takové, že $B(y, \epsilon) \subseteq B(x, r)$.

2. Zvolme libovolný bod y

Nechť y je libovolný bod uvnitř naší velké koule $B(x, r)$.

- Co to znamená? Z definice koule víme, že jeho vzdálenost od středu x je $d(x, y) < r$.

3. Najdeme poloměr ϵ

Potřebujeme najít poloměr ϵ pro novou, malou kouli se středem y . Jak velký může být?

- Intuitivně, y je od středu x vzdáleno $d(x, y)$. "Místo", které zbývá od y k okraji velké koule $B(x, r)$, je $r - d(x, y)$.
- Zvolme tedy náš nový poloměr jako toto zbývající místo:

$$\epsilon = r - d(x, y)$$

- Protože $d(x, y) < r$, je jasné, že $\epsilon > 0$, což je pro poloměr potřeba.

4. Dokažme, že to funguje

Teď musíme dokázat, že naše volba ϵ byla správná. Chceme ukázat, že celá malá koule $B(y, \epsilon)$ leží uvnitř velké koule $B(x, r)$.

- Jak to ukážeme? Vezmeme si *libovolný* bod z z malé koule $B(y, \epsilon)$ a dokážeme, že musí ležet i ve velké kouli $B(x, r)$.

5. Jádru důkazu: Trojúhelníková nerovnost

- Zvolme tedy libovolný bod $z \in B(y, \epsilon)$.
- Co o z víme? Z definice $B(y, \epsilon)$ víme, že $d(y, z) < \epsilon$.
- Co chceme pro z ukázat? Chceme ukázat, že $z \in B(x, r)$, tedy že $d(x, z) < r$.

Spočítejme $d(x, z)$. Jediný nástroj, který máme, je **trojúhelníková nerovnost** pro body x, y, z :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Teď použijeme, co víme:

- (a) Víme, že $d(y, z) < \epsilon$. Dosadíme to do nerovnosti:

$$d(x, z) < d(x, y) + \epsilon$$

- (b) Víme, jak jsme si ϵ chytře zvolili: $\epsilon = r - d(x, y)$. Dosadíme to:

$$d(x, z) < d(x, y) + (r - d(x, y))$$

- (c) Členy $d(x, y)$ se odečtou:

$$d(x, z) < r$$

6. Závěr

Právě jsme ukázali, že pro libovolný bod $z \in B(y, \epsilon)$ platí $d(x, z) < r$. To ale podle definice znamená, že $z \in B(x, r)$.

- Jelikož z byl libovolný bod z $B(y, \epsilon)$, dokázali jsme, že $B(y, \epsilon) \subseteq B(x, r)$.
- Jelikož y byl libovolný bod z $B(x, r)$, našli jsme pro něj ϵ , které splňuje definici otevřené množiny.
- Tím jsme dokázali, že množina $B(x, r)$ je **otevřená**.

Shrnutí a analogie

Ten důkaz je vlastně jen formální zápis myšlenky "**bublina v bublině**". Abstraktní definice "otevřené množiny" říká: Množina je otevřená, pokud žádný její bod neleží "na kraji". Ať stojíš kdekoli uvnitř, jsi vždy obklopen malou "osobní bublinou" (naší koulí $B(y, \epsilon)$), která je taky celá uvnitř.

U otevřené koule $B(x, r)$ je to zřejmé: pokud stojíš v bodě y , tvůj polštář ϵ je prostě vzdálenost od tebe k okraji té velké koule. A trojúhelníková nerovnost je jen matematický nástroj, jak tuto intuici rigorózně dokázat.

Doufám, že to pomohlo!