

Derivace funkcí dvou (a více) proměnných

text pro studenty učitelství matematiky

FP TUL

1 Derivace funkce jedné proměnné

Nejprve si připomeňme souvislost mezi existencí derivace a lokální aproximací funkce lineární funkcí. Tato myšlenka bude klíčová pro zavedení derivace funkcí více proměnných.

Věta 1. *Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích (ekvivalence).

1. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 , tedy existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Položme $k = f'(x_0)$. Pak limitu upravíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

2. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že existuje $k \in \mathbb{R}$ splňující uvedenou limitní podmínku. Upravme limitu z definice derivace:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)}{x - x_0} + k \right).$$

Díky linearitě limity a předpokladu, že první část výrazu jde k nule, dostáváme:

$$0 + k = k.$$

Limita podílu přírůstků existuje a je rovna k . Funkce je tedy diferencovatelná a platí $f'(x_0) = k$. $\square$

Funkci f můžeme v okolí bodu x_0 vyjádřit pomocí Taylorova polynomu stupně 1 a jeho zbytku $R(x)$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + R(x).$$

Podmínka z předchozí věty (kde $k = f'(x_0)$) má pak pro zbytek $R(x)$ tvar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

To interpretujeme tak, že zbytek $R(x)$ klesá k nule „rychleji“ než lineární výraz $(x - x_0)$.

2 Funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$ (Parametrické křivky)

Funkce jedné proměnné s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ obvykle popisují parametrické křivky v rovině. Uveďme si tři základní příklady.

Příklad 1. *Parametrické rovnice přímky* zadané bodem $A = [x_0, y_0]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (s_x, s_y)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + s_x \cdot t \\y(t) &= y_0 + s_y \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Příklad 2. *Parametrické rovnice kružnice* se středem v počátku a poloměrem $r = 2$:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cos t \\y(t) &= 2 \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Příklad 3. *Parametrické rovnice elipsy* se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$ a poloosami a, b :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + a \cos t \\y(t) &= y_0 + b \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Derivace a Taylorův polynom pro vektorové funkce

Uvažujme nyní obecnou křivku danou parametrickými rovnicemi $x = x(t), y = y(t)$. Můžeme ji chápat jako vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Derivaci této funkce počítáme po složkách (pokud derivace složek existují):

$$\mathbf{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Tento vektor $\mathbf{f}'(t_0)$ představuje **tečný vektor** ke křivce v bodě t_0 .

Aplikujeme-li Taylorův rozvoj prvního stupně na každou složku zvlášť, dostáváme:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + R_x(t), \\y(t) &= y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + R_y(t).\end{aligned}$$

Ve vektorovém zápisu to vypadá následovně:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{R}(t), \quad \text{kde } \mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} R_x(t) \\ R_y(t) \end{pmatrix}.$$

z teorie funkcí jedné proměnné (viz sekce 1) víme, že pro složky zbytku platí:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R_x(t)}{t - t_0} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R_y(t)}{t - t_0} = 0.$$

Nyní odvodíme, že i velikost (norma) vektoru zbytku $\|\mathbf{R}(t)\|$ jde k nule rychleji než $|t - t_0|$. Chceme ukázat, že:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\mathbf{R}(t)\|}{|t - t_0|} = 0.$$

Odvození:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sqrt{R_x^2(t) + R_y^2(t)}}{|t - t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\frac{R_x^2(t)}{(t - t_0)^2} + \frac{R_y^2(t)}{(t - t_0)^2}} = \sqrt{\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R_x(t)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R_y(t)}{t - t_0}\right)^2}.$$

Protože obě limity pod odmocninou jsou rovny nule, je i celková limita rovna nule. Tím jsme dokázali, že lineární aproximace tečným vektorem je „dobrá“ i ve smyslu euklidovské vzdálenosti v $\mathbb{R}^2$.

3 Derivace funkce dvou proměnných

Přirozeným zobecněním derivace funkce jedné proměnné pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ není pouhá existence parciálních derivací (které zkoumají změny jen ve směrech os), ale existence **lineární aproximace** funkce v daném bodě.

Definice 1 (Diferencovatelnost a totální diferenciál). *Řekneme, že funkce $f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$, jestliže existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (lineární forma) takové, že*

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(A + \mathbf{h}) - f(A) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ je vektor přírůstku a $\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Lineární zobrazení L nazýváme **totálním diferenciálem** (nebo derivací) funkce f v bodě A a značíme $df(A)$ nebo $f'(A)$.

Protože L je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, musí mít tvar

$$L(\mathbf{h}) = c_1 h_1 + c_2 h_2,$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Nyní odvodíme, čemu se tyto konstanty musí rovnat.

Nutná podmínka diferencovatelnosti

Předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A . Zkoumejme limitu z definice po speciálních cestách – ve směru souřadnicových os.

1. Zvolme $\mathbf{h} = (h_1, 0)$, kde $h_1 \rightarrow 0$. Pak $\|\mathbf{h}\| = |h_1|$. Dosazením do limitní podmínky dostáváme:

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0) - (c_1 h_1 + c_2 \cdot 0)}{|h_1|} = 0.$$

Pokud tuto limitu přepíšeme bez absolutní hodnoty (pro $h_1 > 0$ i $h_1 < 0$ musí vyjít 0), zjistíme, že to je přesně definice parciální derivace podle x minus c_1 :

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} - c_1 = 0 \implies c_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(A).$$

2. Analogicky volbou $\mathbf{h} = (0, h_2)$ odvodíme, že $c_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$.

Závěr: Pokud diferenciál existuje, je jednoznačně určen gradientem funkce:

$$L(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)h_2 = \nabla f(A) \cdot \mathbf{h}.$$

Postačující podmínka diferencovatelnosti

Samotná existence parciálních derivací k diferencovatelnosti nestačí (negarantuje dobrou aproximaci v jiných směrech než osách). Musíme přidat požadavek na jejich spojitost.

Věta 2. *Nechť má funkce f v jistém okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a nechť jsou tyto parciální derivace v bodě A spojité. Pak je funkce f v bodě A diferencovatelná.*

Důkaz. Chceme ukázat, že limita

$$V = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(A)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(A)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

je rovna nule. Výraz v čitateli (přírůstek funkce) rozepíšeme tak, abychom se pohybovali vždy jen v jedné souřadnici (přičteme a odečteme „mezibod“ $f(x_0 + h_1, y_0)$):

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \underbrace{[f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0)]}_{\Delta_y} + \underbrace{[f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)]}_{\Delta_x}.$$

Na tyto rozdíly aplikujeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkce jedné proměnné:

- Pro Δ_y (mění se jen y , x je fixní $x_0 + h_1$): Existuje $\theta_2 \in (0, 1)$ tak, že

$$\Delta_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2) \cdot h_2.$$

- Pro Δ_x (mění se jen x): Existuje $\theta_1 \in (0, 1)$ tak, že

$$\Delta_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0) \cdot h_1.$$

Dosadíme do limity V . Čítec zlomku bude vypadat takto (sdružíme členy s h_1 a h_2):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right) h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) h_2.$$

Označme závorky jako „chyby“ ε_1 a ε_2 . Díky předpokladu **spojitosti** parciálních derivací v bodě A platí, že pro $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ jdou $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ i $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Limitu V nyní můžeme odhadnout:

$$|V| = \frac{|\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2|}{\|\mathbf{h}\|} \leq |\varepsilon_1| \frac{|h_1|}{\|\mathbf{h}\|} + |\varepsilon_2| \frac{|h_2|}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Protože podíl $\frac{|h_i|}{\|\mathbf{h}\|}$ je vždy menší nebo roven 1, máme

$$|V| \leq |\varepsilon_1| \cdot 1 + |\varepsilon_2| \cdot 1 \rightarrow 0.$$

Tím je věta dokázána. □

Tečná rovina a Taylorův polynom

Pokud je funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$ diferencovatelná, můžeme graf funkce v okolí tohoto bodu aproximovat **tečnou rovinou**.

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ má tvar:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Pravá strana této rovnice představuje **Taylorův polynom 1. stupně** funkce f v bodě A , který značíme $T_1(X)$, kde $X = [x, y]$:

$$T_1(X) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Funkci f pak můžeme vyjádřit jako součet tohoto polynomu a zbytku $R(X)$:

$$f(X) = T_1(X) + R(X).$$

Klíčovou vlastností diferencovatelné funkce je chování tohoto zbytku. Z definice diferencovatelnosti (viz předchozí sekce) plyne, že zbytek konverguje k nule rychleji než vzdálenost od bodu A :

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{R(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

4 Derivace složené funkce a derivace ve směru

Nyní propojíme znalosti o křivkách v rovině (vektorové funkce jedné proměnné) s funkcemi dvou proměnných.

Věta 3 (Řetízkové pravidlo). *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě A . Nechť $\mathbf{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ je hladká křivka (funkce $t \mapsto [x(t), y(t)]$) taková, že pro jisté t_0 platí $\mathbf{g}(t_0) = A$. Pak složená funkce $F(t) = f(x(t), y(t))$ má v bodě t_0 derivaci a platí:*

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot y'(t_0).$$

Vektorově lze tento vztah zapsat pomocí gradientu funkce f a tečného vektoru křivky $\mathbf{g}$:

$$F'(t_0) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{g}'(t_0).$$

Tento vzorec říká, že okamžitá změna hodnoty funkce podél křivky je dána skalárním součinem gradientu (jak se funkce mění v prostoru) a rychlosti pohybu po křivce.

Derivace ve směru

Jako speciální případ řetízkového pravidla můžeme zavést derivaci ve směru. Představme si, že bod A opouštíme po přímce ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Parametrické rovnice takového pohybu jsou:

$$\mathbf{g}(t) = A + t\mathbf{u} = [x_0 + tu_1, y_0 + tu_2].$$

Všimněme si, že derivace (tečný vektor) této cesty je přímo $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{u}$.

Rychlost změny funkce f v tomto směru (pro $t = 0$) nazýváme **derivací ve směru $\mathbf{u}$** a značíme $D_{\mathbf{u}}f(A)$. Z řetízkového pravidla plyne:

$$D_{\mathbf{u}}f(A) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(A)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)u_2.$$

5 Geometrický význam gradientu a vrstevnice

Abychom plně pochopili chování funkce dvou proměnných, připomeňme si vlastnosti skalárního součinu, který hraje v předchozích vzorcích hlavní roli.

Skalární součin a úhel vektorů

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je definován jako $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi$, kde φ je úhel, který vektory svírají. Znaménko skalárního součinu závisí pouze na kosinus úhlu:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \iff$ úhel je ostrý ($\varphi < 90^\circ$). Vektory míří „zhruba stejným směrem“.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 \iff$ úhel je tupý ($\varphi > 90^\circ$). Vektory míří „proti sobě“.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff$ vektory jsou na sebe kolmé ($\varphi = 90^\circ$).

Protože derivace ve směru $\mathbf{u}$ je dána vztahem $D_{\mathbf{u}}f(A) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{u}$, můžeme říci:

- Funkce roste nejrychleji, když je úhel mezi směrem pohybu a gradientem nulový (směr gradientu).
- Funkce klesá nejrychleji, když jdeme proti směru gradientu.
- Hodnota funkce se nemění, pokud je směr pohybu kolmý na gradient.

Vrstevnice a gradient

Definice 2. *Vrstevnicí funkce $f(x, y)$ na úrovni $c \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu všech bodů v rovině, které mají funkční hodnotu rovnu c :*

$$V_c = \{[x, y] \in D_f \mid f(x, y) = c\}.$$

Představme si vrstevnici jako hladkou křivku procházející bodem A . Pokud se pohybujeme po této křivce (tečný vektor pohybu označme $\mathbf{t}$), hodnota funkce f se nemění (je stále rovna konstantě c). Rychlost změny funkce ve směru tečny $\mathbf{t}$ tedy musí být nulová:

$$D_{\mathbf{t}}f(A) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{t} = 0.$$

Z vlastností skalárního součinu (bod 3 výše) plyne důležitý geometrický poznatek:

Gradient funkce v bodě A je vždy kolmý k vrstevnici procházející tímto bodem.

Tato vlastnost nám umožňuje snadno určit směr největšího spádu v terénu (kolmo na vrstevnice) nebo konstruovat tečny k vrstevnicím, známe-li gradient.

PŘEDCHOZÍ TEXT JE OD GEMINI.

A PROTOŽE SE GEMINI TVÁŘILO UNAVERNĚ A ŽE NA ZÁVĚRU TEXTU ODMÍTÁ PRACOVAT, POŽÁDALA JSEM CHATGPT. ZDE JE JEHO PRODUKT.

Tečná rovina, Taylorův polynom a zbytek

v předchozí větě jsme ukázali, že pro diferencovatelnou funkci f v bodě $A = [x_0, y_0]$ existuje lineární zobrazení

$$L(\mathbf{h}) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2),$$

takové, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(A + \mathbf{h}) - f(A) - L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Definice 3 (Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných). *Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelnou v bodě $A = [x_0, y_0]$. Grafem funkce rozumíme množinu bodů*

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}.$$

Bod na grafu odpovídající bodu A označme

$$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě P_0 je rovina daná rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Všimněme si, že pravá strana této rovnice je *lineární aproximace* funkce f v bodě A . Tuto lineární aproximaci nazýváme Taylorovým polynomem stupně 1.

Definice 4 (Taylorův polynom stupně 1). *Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. **Taylorův polynom stupně 1** v bodě A je funkce*

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Zbytek označíme

$$R(x, y) = f(x, y) - T_1(x, y).$$

Věta 4 (Vlastnost zbytku Taylorova polynomu stupně 1). *Nechť je funkce f diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Označme $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, kde*

$$h_1 = x - x_0, \quad h_2 = y - y_0,$$

a $\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Pak existuje funkce $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$f(A + \mathbf{h}) = f(A) + \nabla f(A) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}),$$

kde

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0.$$

Jinými slovy, zbytek R lze psát ve tvaru

$$R(A + \mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}), \quad \varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow 0 \text{ pro } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Tato vlastnost je pouze jiným přepsáním definice diferencovatelnosti z předchozí sekce: říká, že „chyba lineární aproximace“ je řádově menší než samotný přírůstek argumentu.

6 Řetízkové pravidlo a derivace ve směru

Řetízkové pravidlo pro složenou funkci $f(x(t), y(t))$

Uvažujme funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

která je diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$, a parametrickou křivku v rovině

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

kde $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné v bodě t_0 . Nechť

$$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = A.$$

Definujme složenou funkci jedné proměnné

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(\mathbf{r}(t)).$$

Věta 5 (Řetízkové pravidlo). *Nechť f je diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$ a x, y jsou diferencovatelné v bodě t_0 , kde $\mathbf{r}(t_0) = A$. Potom je funkce $g(t) = f(x(t), y(t))$ diferencovatelná v bodě t_0 a platí*

$$g'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(A) x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) y'(t_0).$$

Vektorově lze psát

$$g'(t_0) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{r}'(t_0),$$

kde $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ je tečný vektor ke křivce v bodě A .

Náčrt důkazu. z definice diferencovatelnosti máme v okolí bodu A

$$f(A + \mathbf{h}) = f(A) + \nabla f(A) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon(\mathbf{h}), \quad \varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow 0.$$

Volíme $\mathbf{h} = \mathbf{r}(t) - A$. Potom

$$g(t) - g(t_0) = f(\mathbf{r}(t)) - f(A) = \nabla f(A) \cdot (\mathbf{r}(t) - A) + \|\mathbf{r}(t) - A\| \varepsilon(\mathbf{r}(t) - A).$$

Po vydělení $t - t_0$ a přechodu k limitě $t \rightarrow t_0$ využijeme existenci derivace $\mathbf{r}'(t_0)$ a fakt, že $\|\mathbf{r}(t) - A\| = O(|t - t_0|)$, aby se člen s ε „ztratil“. Dostaneme $g'(t_0) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$. $\square$

Derivace ve směru

Derivaci ve směru lze chápat jako speciální případ řetízkového pravidla, kdy vnitřní křivka je přímka procházející bodem A ve směru zvoleného vektoru.

Definice 5 (Derivace ve směru). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $A = [x_0, y_0]$. Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je směrový vektor délky 1 (jednotkový vektor). Derivaci funkce f v bodě A ve směru vektoru $\mathbf{u}$ definujeme jako limitu*

$$D_{\mathbf{u}}f(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\mathbf{u}) - f(A)}{t},$$

pokud tato limita existuje.

Všimněme si, že zde vystupuje složená funkce $g(t) = f(A + t\mathbf{u})$, což je přesně situace z řetízkového pravidla s parametrickou přímkou

$$\mathbf{r}(t) = A + t\mathbf{u}.$$

Věta 6. *Nechť je funkce f diferencovatelná v bodě A a $\mathbf{u}$ je jednotkový vektor. Pak derivace ve směru $\mathbf{u}$ existuje a*

$$D_{\mathbf{u}}f(A) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{u}.$$

Důkaz. Použijeme řetízkové pravidlo pro $g(t) = f(A + t\mathbf{u})$. Máme

$$g'(0) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{r}'(0),$$

kde $\mathbf{r}(t) = A + t\mathbf{u}$, tedy $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{u}$. z definice derivace ve směru je ale

$$g'(0) = D_{\mathbf{u}}f(A),$$

proto

$$D_{\mathbf{u}}f(A) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{u}.$$

□

z geometrického hlediska tedy derivace ve směru $\mathbf{u}$ udává, jak rychle se mění hodnoty funkce, když se v bodě A pohybujeme ve směru vektoru $\mathbf{u}$.

7 Skalární součin, gradient a vrstevnice

Skalární součin a úhel mezi vektory

Definice 6 (Skalární součin vektorů v $\mathbb{R}^2$). *Pro vektory $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ a $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ v rovině definujeme **skalární součin** jako*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Skalární součin má známou geometrickou interpretaci:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \varphi,$$

kde φ je úhel mezi vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ a $\|\mathbf{v}\|$ je eukleidovská norma (délka) vektoru $\mathbf{v}$.

z tohoto vztahu plyne, že

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \iff \cos \varphi = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{2},$$

tj. skalární součin je nulový právě tehdy, když jsou vektory navzájem kolmé (ortogonální).

Vrstevnice funkce dvou proměnných

Definice 7 (Vrstevnice). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. **Vrstevnicí** (nebo **množinou stejné výšky**) funkce f pro hodnotu c nazýváme množinu*

$$K_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}.$$

Pokud $f(A) = c$, říkáme, že bod A leží na vrstevnici K_c .

Vrstevnice si můžeme představit jako úsečky „mapy“: spojují body v rovině, kde má funkce stejnou hodnotu (např. stejnou nadmořskou výšku).

Gradient a jeho vztah k vrstevnici

Ukažme nyní, jak souvisí gradient funkce s vrstevnicemi.

Zvolme bod $A = [x_0, y_0]$ tak, že $f(A) = c$, tedy $A \in K_c$, a předpokládejme, že f je v bodě A diferencovatelná a $\nabla f(A) \neq \mathbf{0}$.

Nechť $\mathbf{r}(t)$ je parametrické vyjádření části vrstevnice K_c v okolí bodu A tak, že

$$\mathbf{r}(t_0) = A, \quad f(\mathbf{r}(t)) = c \quad \text{pro všechna } t \text{ v okolí } t_0.$$

Pak složená funkce

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

je konstantní: $g(t) \equiv c$. Její derivace v bodě t_0 je tedy nulová:

$$g'(t_0) = 0.$$

Na druhou stranu podle řetízkového pravidla platí

$$g'(t_0) = \nabla f(A) \cdot \mathbf{r}'(t_0),$$

kde $\mathbf{r}'(t_0)$ je tečný vektor ke křivce (vrstevnici) v bodě A . Dostáváme tedy

$$\nabla f(A) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

To znamená, že **gradient je kolmý na tečný vektor** k vrstevnici v bodě A .

Věta 7. *Nechť f je diferencovatelná v bodě A a $\nabla f(A) \neq \mathbf{0}$. Potom je vektor $\nabla f(A)$ kolmý ke každému tečnému vektoru k vrstevnici K_c , kde $c = f(A)$, v bodě A . Jinak řečeno, **gradient funkce v bodě A je normálovým vektorem vrstevnice procházející bodem A .***

Spojíme-li tuto větu s výsledkem o derivaci ve směru, získáme i důležitou interpretaci: gradient ukazuje směr největšího růstu funkce a jeho velikost udává, jak rychle se funkce v tomto směru mění. Naopak ve směrech kolmých na gradient (tj. podél vrstevnice) se hodnota funkce v prvním přiblížení nemění – derivace ve směru tečného vektoru k vrstevnici je nulová.