

Metrické prostory: Základní pojmy

Učební text pro studenty učitelství matematiky

1 Důkaz věty o omezenosti kompaktní množiny

Definice 1.1 (Omezená množina). Nechť (M, d) je metrický prostor. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq M$ je **omezená**, jestliže je obsažena v nějaké otevřené kouli.

$$A \text{ je omezená} \iff (\exists x_0 \in M)(\exists r > 0)(A \subseteq B(x_0, r))$$

Věta 1.2 (Kompaktní množina je omezená). Nechť (M, d) je metrický prostor. Je-li množina $A \subseteq M$ kompaktní, pak je A omezená.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem.

- Předpokládejme, že A je kompaktní, ale **není** omezená.
- (Pokud $A = \emptyset$, je triviálně omezená. Předpokládejme tedy $A \neq \emptyset$.)
- Zvolme libovolný bod $x_1 \in A$.
- Jelikož A není omezená, nemůže být obsažena v žádné kouli. Speciálně, $A \not\subseteq B(x_1, 1)$. Musí tedy existovat bod $x_2 \in A$ takový, že $x_2 \notin B(x_1, 1)$, tj. $d(x_1, x_2) \geq 1$.
- Podobně, $A \not\subseteq B(x_1, 2)$. Musí tedy existovat bod $x_3 \in A$ takový, že $d(x_1, x_3) \geq 2$.
- Pokračujeme induktivně: pro každé $n \in \mathbb{N}$ (kde $n > 1$) platí, že A není obsažena v kouli $B(x_1, n-1)$. Proto existuje bod $x_n \in A$ takový, že $d(x_1, x_n) \geq n-1$.
- Tímto postupem jsme zkonstruovali posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z A .
- Nyní ukážeme, že z této posloupnosti *nelze* vybrat konvergentní podposloupnost.
- Připomeňme, že každá konvergentní posloupnost je *cauchyovská*. Pokud tedy $\{x_n\}$ nemá žádnou cauchyovskou podposloupnost, nemůže mít ani konvergentní.
- Zvolme libovolnou podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Pro dva různé indexy $k < j$ platí $n_k < n_j$. Z konstrukce naší posloupnosti máme:

$$\begin{aligned} - d(x_1, x_{n_j}) &\geq n_j - 1 \\ - d(x_1, x_{n_k}) &\geq n_k - 1 \end{aligned}$$

- Použijeme trojúhelníkovou nerovnost (v obráceném tvaru):

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \geq |d(x_1, x_{n_k}) - d(x_1, x_{n_j})|$$

- (Toto nám nedává dostatečný odhad. Zkusme jinak.)

- Použijeme trojúhelníkovou nerovnost přímo:

$$d(x_1, x_{n_j}) \leq d(x_1, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_j})$$

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \geq d(x_1, x_{n_j}) - d(x_1, x_{n_k})$$

- Z naší konstrukce máme $d(x_1, x_{n_j}) \geq n_j - 1$. Bod x_{n_k} je také prvkem A , ale nevíme, jak je daleko od x_1 . Konstrukce posloupnosti byla chybná.

- **Oprava důkazu (správná konstrukce posloupnosti):**

- Předpokládejme, že A není omezená.
- Zvolme $x_1 \in A$.
- $A \not\subseteq B(x_1, 1)$, takže existuje $x_2 \in A$ takový, že $d(x_1, x_2) \geq 1$.
- Množina $\{x_1, x_2\}$ je konečná, tedy omezená. Existuje $r_2 > 0$ takové, že $\{x_1, x_2\} \subseteq B(x_1, r_2)$.
- Protože A není omezená, $A \not\subseteq B(x_1, r_2 + 1)$. Existuje $x_3 \in A$ takový, že $d(x_1, x_3) \geq r_2 + 1$. To ale nezaručuje vzdálenost od x_2 .

- **Oprava důkazu (standardní konstrukce):**

- Předpokládejme sporem, že A je kompaktní a není omezená.
- Zvolme libovolný $x_1 \in A$.
- Protože $A \not\subseteq B(x_1, 1)$, existuje $x_2 \in A$ s $d(x_1, x_2) \geq 1$.
- Protože $A \not\subseteq B(x_1, \max(1, d(x_1, x_2)) + 1)$, existuje $x_3 \in A$ takový, že $d(x_1, x_3) \geq \max(1, d(x_1, x_2)) + 1$. To je stále špatně.

- **Oprava důkazu (nejjednodušší konstrukce):**

- Předpokládejme sporem, že A je kompaktní a není omezená.
- Zvolme libovolný bod $p \in M$ (nemusí být v A).
- Protože A není omezená, $A \not\subseteq B(p, r)$ pro žádné $r > 0$.
- Speciálně pro $r = 1$, $A \not\subseteq B(p, 1)$. Existuje $x_1 \in A$ tak, že $d(p, x_1) \geq 1$.
- Pro $r = 2$, $A \not\subseteq B(p, 2)$. Existuje $x_2 \in A$ tak, že $d(p, x_2) \geq 2$.
- Induktivně: pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ tak, že $d(p, x_n) \geq n$.
- Tím jsme zkonstruovali posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$.
- Protože A je kompaktní (dle předpokladu), musí z $\{x_n\}$ existovat vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k nějakému bodu $x \in A$.
- Každá konvergentní posloupnost je omezená (což je známo z analýzy, ale zde jsme to nedokazovali. Dokážeme, že je cauchyovská).
- Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Tedy $\{x_{n_k}\}$ je cauchyovská.
- Pro $\varepsilon = 1$ musí existovat K takové, že pro všechna $k, j > K$ platí $d(x_{n_k}, x_{n_j}) < 1$.

- Z trojúhelníkové nerovnosti ale máme:

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \geq |d(p, x_{n_k}) - d(p, x_{n_j})|$$

- Z konstrukce víme, že $d(p, x_n) \geq n$. Tedy $d(p, x_{n_k}) \geq n_k$ a $d(p, x_{n_j}) \geq n_j$.
- Předpokládejme $k < j$, pak $n_k < n_j$.

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \geq |d(p, x_{n_j}) - d(p, x_{n_k})| \geq d(p, x_{n_j}) - d(p, x_{n_k})$$

- (Toto opět nevede ke sporu, protože nevíme, jak velký je $d(p, x_{n_k})$).

- **Oprava důkazu (finální pokus):**

- Předpokládejme sporem, že A je kompaktní a není omezená.
- Zvolme libovolný $x_1 \in A$.
- $A \not\subseteq B(x_1, 1)$, takže existuje $x_2 \in A$ s $d(x_1, x_2) > 1$.
- $A \not\subseteq B(x_1, d(x_1, x_2) + 1)$, takže existuje $x_3 \in A$ s $d(x_1, x_3) > d(x_1, x_2) + 1$.
- Induktivně: máme-li $x_1, \dots, x_n$, množina A není omezená, takže $A \not\subseteq B(x_1, \max_{i \leq n} d(x_1, x_i) + 1)$. Existuje $x_{n+1} \in A$ s $d(x_1, x_{n+1}) > \max_{i \leq n} d(x_1, x_i) + 1$.
- Tím máme posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$. Pro $n < m$ platí:

$$d(x_1, x_m) > \max_{i \leq m-1} d(x_1, x_i) + 1 \geq d(x_1, x_n) + 1$$

- Tedy $d(x_1, x_m) - d(x_1, x_n) > 1$.
- Z trojúhelníkové nerovnosti: $d(x_n, x_m) \geq |d(x_1, x_n) - d(x_1, x_m)| = d(x_1, x_m) - d(x_1, x_n) > 1$.
- Posloupnost $\{x_n\}$ má tedy tu vlastnost, že $d(x_n, x_m) > 1$ pro libovolné $n \neq m$.
- Taková posloupnost nemůže obsahovat cauchyovskou podposloupnost (pro $\varepsilon = 1$ nikdy nesplní definici).
- Pokud podposloupnost není cauchyovská, nemůže být ani konvergentní.
- To je ale ve sporu s předpokladem, že A je kompaktní (Definice ??), protože z posloupnosti $\{x_n\} \subseteq A$ musí jít vybrat konvergentní podposloupnost.
- Náš počáteční předpoklad (že A není omezená) byl chybný.
- Množina A musí být omezená.

□