

Extrémy funkcí dvou (a více) proměnných

shrnutí a příklad

text pro studenty učitelství matematiky

FP TUL

1 Shrnutí teoretických poznatků

Jak jsme si ukázali v předchozích kapitolách, pro spojité funkce na metrických prostorech (speciálně na $\mathbb{R}^2$, případně obecněji na $\mathbb{R}^n$) platí několik klíčových vlastností, které jsou zásadní pro řešení optimalizačních úloh:

- **Spojitosť parciálních funkcí:** funkce $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ jsou spojité na celém svém definičním oboru $\mathbb{R}^2$. Spojitosť funkce f jsme dokázali na přednášce, důkaz spojitosti funkce g čeká na cvičení.
- **Platí věta o spojitosti a aritmetických operacích:** Jsou-li funkce f a g (definované na $\mathbb{R}^2$ s hodnotami v $\mathbb{R}$) spojité v bodě $[x_0, y_0]$, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f + g$, $f - g$ a $f \cdot g$. Je-li navíc $g(x_0, y_0) \neq 0$, je v tomto bodě spojitá i funkce f/g .
- Z předchozích bodů plyne **Spojitosť polynomů:** Polynomiální funkce více proměnných (např. $f(x, y) = x^2 - x + 3y^2$) jsou spojité na celém svém definičním oboru (v tomto případě na $\mathbb{R}^2$, obecněji na $\mathbb{R}^n$).
- **Platí věta o spojitosti složené funkce:** Nechtě $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě A a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $f(A)$. Pak složená funkce $h = g \circ f$ (definovaná jako $h(X) = g(f(X))$) je spojitá v bodě A .
- **Spojitosť složitějších funkcí:** Kombinací základních spojitých funkcí (jako $f(x, y) = x$ a $g(x, y) = y$), věty o aritmetických operacích a věty o spojitosti složené funkce, můžeme odvodit spojitost široké třídy funkcí. Například:
 - Funkce $h_1(x, y) = x^2$ je spojitá. Můžeme ji chápat jako složení funkce $g(t) = t^2$ (spojitá na $\mathbb{R}$) a funkce $f(x, y) = x$ (spojitá na $\mathbb{R}^2$).
 - Funkce $h_2(x, y) = \sin(x + y)$ je spojitá. Je to složení spojitě funkce $\sin(t)$ a spojitěho polynomu $p(x, y) = x + y$.
 - Funkce $h_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je spojitá. Je to složení spojitě funkce $g(t) = \sqrt{t}$ (spojitá na $\langle 0, \infty \rangle$) a spojitěho polynomu $p(x, y) = x^2 + y^2$ (který nabývá pouze nezáporných hodnot).

- Nyní uvedeme věty, které propojují pojem spojitosti s tím, zda je nějaká množina otevřená či uzavřená. Tento nástroj nám později umožní elegantně dokázat, že množiny definované spojitými funkcemi a nerovnicemi (jako např. $g(x, y) \geq 0$) jsou uzavřené, což je zásadní pro ověření kompaktnosti.

Spojitosť a vzory množin: Spojitosť funkce lze charakterizovat pomocí vzorů otevřených a uzavřených množin:

- Funkce je spojitá, právě když vzorem *každé* otevřené množiny (např. otevřeného intervalu v $\mathbb{R}$) je otevřená množina.
- Funkce je spojitá, právě když vzorem *každé* uzavřené množiny (např. uzavřeného intervalu v $\mathbb{R}$) je uzavřená množina.

Příklad. Polorovina zadaná nerovnicí $x + y \leq 1$ je vzorem intervalu $I = (-\infty, 1]$ ve spojitě funkci $f(x, y) = x + y$. Protože je interval I uzavřená množina v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$, plyne z předchozího, že i polorovina $x + y \leq 1$ je uzavřená množina v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^2, \|\cdot - \cdot\|)$.

Obecně platí: je-li $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkce spojitá na svém definičním oboru, jsou pro $a \in \mathbb{R}$ množiny A, B uzavřené a množiny C, D otevřené

$$\begin{aligned} A &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq a\}, & C &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < a\}, \\ B &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq a\}, & D &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > a\} \end{aligned}$$

Výše uvedený příklad nám umožňuje snadno rozhodnout o uzavřenosti/otevřenosti některých množin, například polorovin. V úlohách se budou vyskytovat složitější množiny, například trojúhelník. Využijeme toho, že trojúhelník je průnikem tří polorovin a použijeme výsledek následující úlohy.

Úloha. Necht' jsou množiny A, B uzavřené. Ukažte, že jsou uzavřené i množiny $A \cup B, A \cap B$. Zobecněte tvrzení na průnik a sjednocení tří, čtyř, pěti množin a dokažte tvrzení matematickou indukcí pro konečný počet množin $n \in \mathbb{N}$.

- **Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$:** V euklidovských prostorech $\mathbb{R}^n$ (tedy i v $\mathbb{R}^2$) platí tzv. Heine-Borelova věta. Pro nás je klíčová implikace, že **každá uzavřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$ je kompaktní**.
- **Věta o extrémních hodnotách (Weierstrassova):** Toto je stěžejní věta pro optimalizaci. Říká, že **spojitá reálná funkce definovaná na (neprázdné) kompaktní množině nabývá na této množině své největší hodnoty (maxima) i nejmenší hodnoty (minima)**.

Tato poslední věta nám dává jistotu: pokud máme spojitou funkci a "pěknou" (tj. kompaktní) množinu, globální extrémy *musí* existovat.

2 Extrémy funkce dvou proměnných

Tato sekce zavádí teoretický aparát nutný k nalezení kandidátů na extrémy uvnitř množiny.

1. **Definice (Globální extrém):** Necht' $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0] \in A$ **globální maximum** na A , jestliže pro všechna $[x, y] \in A$

platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. Analogicky, f má v $[x_0, y_0] \in A$ **globální minimum** na A , jestliže pro všechna $[x, y] \in A$ platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

2. **Definice (Lokální extrém):** Řekneme, že f má v bodě $[x_0, y_0] \in A$ **lokální maximum** (minimum) na A , jestliže existuje okolí U bodu $[x_0, y_0]$ takové, že pro všechna $[x, y] \in A \cap U$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Poznámka: Okolí U bodu x je koule $B(x, r)$. Existuje okolí U takové, že platí ... tedy můžeme číst: existuje $r > 0$, že pro $U = B(x, r)$ platí ...

3. **Poznámka:** při hledání extrémů budeme používat pozorování, která jsou přímým důsledkem definic a která shrneme jako věty v 4 až 6.
4. **Věta (Vztah globálního a lokálního extrému):** Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ globální extrém na množině A , pak má v tomto bodě i lokální extrém (vzhledem k množině A).
5. Předchozí věta je speciální případ následující věty.

Věta (Globální extrém na množině a její podmnožině): Nechť $A \subseteq B$, $x \in A$ a funkce f má na množině B globální extrém v bodě x .

Pak má funkce f globální extrém v bodě x i na množině A .

6. Předchozí věta platí i ve verzi pro lokální extrémy.

Věta (Lokální extrém na množině a její podmnožině): Nechť $A \subseteq B$, $x \in A$ a funkce f má na množině B lokální extrém v bodě x .

Pak má funkce f lokální extrém v bodě x i na množině A .

7. **Definice (Parciální funkce):** Nechť $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, a $[x_0, y_0] \in A$. **Parciální funkci** (funkci jedné proměnné) $g_1(x)$ definujeme jako $g_1(x) = f(x, y_0)$ (tj. "řez" funkce v konstantní výšce y_0). Analogicky definujeme $g_2(y) = f(x_0, y)$ (tj. "řez" funkce v konstantní pozici x_0).
8. **Zopakování (nutná podmínka extrému funkce jedné proměnné):** Připomeňme si větu z analýzy funkcí jedné proměnné: Nechť funkce $g(t)$ jedné reálné proměnné má v bodě t_0 lokální extrém. Je-li t_0 vnitřním bodem definičního oboru funkce g a existuje-li v tomto bodě derivace $g'(t_0)$, pak nutně platí $g'(t_0) = 0$.
9. **Definice (Parciální derivace):** Parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ je definována jako derivace parciální funkce $g_1(x) = f(x, y_0)$ v bodě x_0 . Značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0)$. Tedy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'_1(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Analogicky pro derivaci podle y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = g'_2(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

10. **Definice (Gradient a stacionární bod):** Vektor $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$ nazýváme **gradientem** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Bod $[x_0, y_0]$, ve kterém je gradient nulový (tj. $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$), nazýváme **stacionární bod**.

11. Z bodů 5, 8 plyne následující věta.

Z bodu 4 pak plyne stejná nutná podmínka i pro globální extrém.

Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém):

Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém a je-li $[x_0, y_0]$ **vnitřním bodem** jejího definičního oboru, pak (pokud obě parciální derivace existují) musí být obě nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Jinými slovy, bod $[x_0, y_0]$ musí být stacionárním bodem (tj. $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$).

3 Řešená úloha: Hledání extrémů na trojúhelníku

Úloha

Nalezněte globální maximum a minimum funkce $f(x, y) = x^2 - x + 3y^2$ na množině M , která je dána trojúhelníkem s vrcholy $A = [0, -1]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 1]$.

Poznámka: Pod trojúhelníkem máme na mysli jeho vnitřek, strany i vrcholy. Rigorózněji množinu M zapíšeme ve tvaru

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + y \leq 1, y - x \geq -1\}$$

3.1 Řešení

Postupujeme v následujících krocích.

1. Ověříme předpoklady pro existenci globálních extrémů.
2. Použijeme nutnou podmínku existence extrému pro nalezení kandidátů na extrémy.
3. Vypočteme funkční hodnoty ve všech nalezených bodech.
4. Uděláme závěr: Z kroku 1 víme, že globální extrémy existují. Z kroku 2 víme, že musí být na našem seznamu kandidátů. Porovnáním jejich funkčních hodnot určíme, který bod odpovídá globálnímu minimu a který globálnímu maximu.

Krok 1: Existence extrémů

Množina M (trojúhelník) je zjevně **omezená** (lze ji celou uzavřít do kružnice, na cvičení určíme její střed a poloměr).

Množina M je **uzavřená**. Nabízíme několik způsobů zdůvodnění.

1. Velký jazykový model Gemini zdůvodnění odbyl konstatováním: obsahuje všechny své hrany a vrcholy.
2. Lepší je zdůvodnění od Gemini doplnit náčrtkem trojúhelníku a jednoho jeho vnitřního bodu, jednoho hraničního bodu a jednoho vnějšího bodu. Tyto body doplnit o příslušná okolí ... a demonstrovat znalost příslušných pojmů.

3. Příklad v úvodní části (spojitost a vzory množin) nám umožní provést důkaz uzavřenosti následovně: uvědomíme si, že trojúhelník je průnik tří polorovin. Že polorovina včetně hraniční přímky je uzavřená množina a polorovina bez hraniční přímky je otevřená množina. A závěrem, že průnik konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Jelikož je $M \subseteq \mathbb{R}^2$ uzavřená a omezená, je podle Heine-Borelovy věty **kompaktní**.

Funkce $f(x, y)$ je polynom, a je tedy **spojitá** na celém $\mathbb{R}^2$, a tím pádem i na množině M .

Protože hledáme extrémy spojitě funkce na kompaktní množině, Weierstrassova věta nám **zaručuje, že globální maximum i minimum existují**.

Krok 2a: Kandidáti uvnitř M

Hledáme stacionární body, tj. body, kde je gradient funkce nulový: $\nabla f = (0, 0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y\end{aligned}$$

Položíme obě derivace rovny nule:

- $2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}$
- $6y = 0 \implies y = 0$

Získali jsme jediný stacionární bod $P_S = [\frac{1}{2}, 0]$. Tento bod leží *uvnitř* trojúhelníku M (leží napravo od hrany AC a mezi přímkami AB a BC). Je to tedy náš první kandidát na extrém.

Krok 2b: Kandidáti na hranici M

Hranice se skládá ze tří úseček: AC , AB a BC .

a) Úsečka AC : Platí $x = 0$ pro $y \in [-1, 1]$. Dosadíme do f : $g_1(y) = f(0, y) = 0^2 - 0 + 3y^2 = 3y^2$. Hledáme extrémy funkce $g_1(y)$ na intervalu $[-1, 1]$. Stacionární bod: $g'_1(y) = 6y = 0 \implies y = 0$. Bod $y = 0$ leží v intervalu $[-1, 1]$, takže získáváme kandidáta $P_1 = [0, 0]$. Musíme také zkontrolovat krajní body intervalu, což jsou vrcholy $A = [0, -1]$ a $C = [0, 1]$.

b) Úsečka AB : Spojuje body $A[0, -1]$ a $B[1, 0]$. Rovnice přímky je $y = x - 1$, pro $x \in [0, 1]$. Dosadíme do f : $g_2(x) = f(x, x-1) = x^2 - x + 3(x-1)^2 = x^2 - x + 3(x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 7x + 3$. Hledáme extrémy $g_2(x)$ na intervalu $[0, 1]$. Stacionární bod: $g'_2(x) = 8x - 7 = 0 \implies x = \frac{7}{8}$. Tento bod leží v intervalu $[0, 1]$. Dopočítáme $y = \frac{7}{8} - 1 = -\frac{1}{8}$. Získáváme kandidáta $P_2 = [\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}]$. Krajní body intervalu jsou vrcholy A a B .

c) Úsečka BC : Spojuje body $B[1, 0]$ a $C[0, 1]$. Rovnice přímky je $y = -x + 1$, pro $x \in [0, 1]$. Dosadíme do f : $g_3(x) = f(x, -x+1) = x^2 - x + 3(-x+1)^2 = x^2 - x + 3(x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 7x + 3$. Hledáme extrémy $g_3(x)$ na intervalu $[0, 1]$. Stacionární bod: $g'_3(x) = 8x - 7 = 0 \implies x = \frac{7}{8}$. Tento bod leží v intervalu $[0, 1]$. Dopočítáme

$y = -\frac{7}{8} + 1 = \frac{1}{8}$. Získáváme kandidáta $P_3 = [\frac{7}{8}, \frac{1}{8}]$. Krajiní body intervalu jsou vrcholy B a C .

Krok 3: Výpočet funkčních hodnot

Shromáždili jsme všechny unikátní kandidáty (jeden z vnitřku, vrcholy, body z hran). Vypočítáme jejich funkční hodnoty:

$$\begin{aligned}f(P_S) &= f(\tfrac{1}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2} + 3(0)^2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4} \\f(A) &= f(0, -1) = 0^2 - 0 + 3(-1)^2 = 3 \\f(C) &= f(0, 1) = 0^2 - 0 + 3(1)^2 = 3 \\f(B) &= f(1, 0) = 1^2 - 1 + 3(0)^2 = 0 \\f(P_1) &= f(0, 0) = 0^2 - 0 + 3(0)^2 = 0 \\f(P_2) &= f(\tfrac{7}{8}, -\tfrac{1}{8}) = (\tfrac{7}{8})^2 - \tfrac{7}{8} + 3(-\tfrac{1}{8})^2 = \tfrac{49}{64} - \tfrac{56}{64} + \tfrac{3}{64} = -\tfrac{4}{64} = -\tfrac{1}{16} \\f(P_3) &= f(\tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{8}) = (\tfrac{7}{8})^2 - \tfrac{7}{8} + 3(\tfrac{1}{8})^2 = \tfrac{49}{64} - \tfrac{56}{64} + \tfrac{3}{64} = -\tfrac{4}{64} = -\tfrac{1}{16}\end{aligned}$$

Krok 4: Závěr

Porovnáním všech vypočtených hodnot $\{-\frac{1}{4}, 3, 3, 0, 0, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{16}\}$ určíme globální extrémy.

- **Globální maximum** je $f_{\max} = 3$ a nabývá se ve dvou bodech: $A = [0, -1]$ a $C = [0, 1]$.
- **Globální minimum** je $f_{\min} = -\frac{1}{4}$ a nabývá se ve vnitřním bodě $P_S = [\frac{1}{2}, 0]$.