

Metrické prostory: Základní pojmy

Učební text pro studenty učitelství matematiky

Vítejte v úvodu do metrických prostorů! Tento koncept je zobecněním myšlenky vzdálenosti, kterou intuitivně známe z běžného světa (například z euklidovské geometrie). Definováním „vzdálenosti“ na různých typech množin získáme mocný nástroj pro analýzu a pochopení jejich struktury.

1 Definice metrického prostoru

Představte si, že máte jakoukoliv neprázdnou množinu prvků – mohou to být body v rovině, funkce, posloupnosti, cokoliv. Metrický prostor vznikne, když na této množině zavedeme pojem **vzdálenosti**.

Definice 1.1 (Metrický prostor). Nechť M je neprázdná množina a d je zobrazení $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Dvojici (M, d) nazveme **metrickým prostorem**, jestliže pro všechna $x, y, z \in M$ platí následující čtyři axiomy:

1. **Nezápornost:** $d(x, y) \geq 0$
2. **Totožnost (Identita):** $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. **Symetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$
4. **Trojúhelníková nerovnost:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Funkci d nazýváme **metrika**.

Příklad: Nejznámějším metrickým prostorem je rovina $\mathbb{R}^2$ s **euklidovskou metrikou**, kde vzdálenost mezi body $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ je definována jako:

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Toto je naše standardní představa vzdálenosti, kterou znáte ze školy.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Abychom mohli mluvit o otevřených a uzavřených množinách, musíme nejprve definovat „okolí“ bodu, kterému se zde říká **otevřená koule**.

Otevřená koule $B(x, r)$ se středem v bodě x a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů $z \in M$, jejichž vzdálenost od x je menší než r .

$$B(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou je otevřená koule vnitřek kruhu (bez hraniční kružnice).

2.1 Vnitřní bod a Otevřená množina

Definice 2.1 (Vnitřní bod). Bod $x \in A$ se nazývá **vnitřním bodem** množiny A , jestliže existuje takové $r > 0$, že celá otevřená koule $B(x, r)$ leží uvnitř množiny A . Tedy $B(x, r) \subset A$.

Definice 2.2 (Otevřená množina). Množina A se nazývá **otevřená**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

2.2 Hraniční bod a Uzavřená množina

Definice 2.3 (Hraniční bod). Bod $x \in M$ se nazývá **hraničním bodem** množiny A , jestliže každá otevřená koule $B(x, r)$ se středem v x obsahuje alespoň jeden bod z množiny A a zároveň alespoň jeden bod, který v A neleží (tj. leží v doplňku $M \setminus A$).

Definice 2.4 (Uzavřená množina). Množina A se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

2.3 Rozdělení bodů prostoru (Trichotomie)

Každý bod metrického prostoru M má vzhledem k dané množině $A \subset M$ právě jednu ze tří možných poloh. Abychom je mohli popsat, zavedeme ještě pojem vnějšího bodu.

Definice 2.5 (Vnější bod). Bod $x \in M$ se nazývá **vnějším bodem** množiny A , jestliže je vnitřním bodem jejího doplňku $A^c = M \setminus A$. To znamená, že existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset A^c$.

Množinu všech vnitřních bodů A značíme $\text{int}(A)$, množinu všech hraničních bodů ∂A a množinu všech vnějších bodů $\text{ext}(A)$. Nyní můžeme formulovat větu o trichotomii.

Věta 2.1 (Trichotomie bodů). *Pro libovolnou množinu $A \subset M$ platí, že množiny $\text{int}(A)$, ∂A a $\text{ext}(A)$ tvoří disjunktní rozklad celého prostoru M . Tedy:*

$$M = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{ext}(A)$$

a zároveň jsou tyto tři množiny po dvou disjunktní.

Důkaz. Zvolme libovolný bod $x \in M$. Musí nastat právě jedna z následujících tří možností:

1. Existuje otevřená koule $B(x, r)$ taková, že $B(x, r) \subset A$. Potom je x dle definice vnitřním bodem A , tj. $x \in \text{int}(A)$.
2. Existuje otevřená koule $B(x, r)$ taková, že $B(x, r) \subset A^c$. Potom je x dle definice vnějším bodem A , tj. $x \in \text{ext}(A)$.
3. Nenastává ani jedna z předchozích možností. To znamená, že pro každou otevřenou kouli $B(x, r)$ platí, že $B(x, r) \not\subset A$ a zároveň $B(x, r) \not\subset A^c$. To je ekvivalentní tvrzení, že každá koule $B(x, r)$ musí obsahovat jak body z A , tak body z A^c . To je ale přesně definice hraničního bodu, tedy $x \in \partial A$.

Tím jsme ukázali, že každý bod $x \in M$ patří do jedné z těchto tří množin. Z definic je zároveň zřejmé, že tyto množiny jsou disjunktní (např. vnitřní bod nemůže být zároveň hraniční, protože jeho okolí leží celé v A , zatímco okolí hraničního bodu musí zasahovat i mimo A). $\square$

2.4 Vztah mezi otevřenými a uzavřenými množinami

Otevřené a uzavřené množiny nejsou protiklady, ale jsou navzájem svázány přes operaci doplňku. Tento fundamentální vztah popisuje následující věta.

Věta 2.2. *Množina $A \subset M$ je otevřená, právě když je její doplněk $A^c = M \setminus A$ uzavřený.*

Důkaz. Důkaz provedeme s využitím Věty 2.1 o trichotomii. Nejprve si uvědomme, že z definice hraničního bodu plyne symetrie: bod je hraničním bodem množiny A , právě když je hraničním bodem jejího doplňku A^c . Tedy $\partial A = \partial(A^c)$.

1. Implikace ($\Rightarrow$): **Nechť A je otevřená, dokážeme, že A^c je uzavřená.** Předpokládáme, že A je otevřená. To z definice znamená, že $A = \text{int}(A)$. Chceme dokázat, že A^c je uzavřená, což znamená, že musí obsahovat všechny své hraniční body, tj. $\partial(A^c) \subset A^c$. Protože $\partial(A^c) = \partial A$, stačí dokázat, že $\partial A \subset A^c$. Z Věty 2.1 víme, že množiny $\text{int}(A)$ a ∂A jsou disjunktní. Protože platí $A = \text{int}(A)$, jsou disjunktní i množiny A a ∂A . To ale znamená, že žádný bod z ∂A neleží v A . Každý bod prostoru však musí ležet buď v A , nebo v A^c . Z toho nutně plyne, že všechny body ∂A musí ležet v A^c . Tím jsme dokázali, že $\partial A \subset A^c$, a tedy A^c je uzavřená.

2. Implikace ($\Leftarrow$): **Nechť A^c je uzavřená, dokážeme, že A je otevřená.** Předpokládáme, že A^c je uzavřená. To z definice znamená, že $\partial(A^c) \subset A^c$. Chceme dokázat, že A je otevřená, tj. že každý její bod je jejím vnitřním bodem. Jinými slovy, chceme ukázat, že $A \subset \text{int}(A)$. Zvolme libovolný bod $x \in A$. Nyní určíme jeho polohu podle trichotomie.

- Bod x nemůže být vnějším bodem A , protože $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c) \subset A^c$, ale náš bod x je v A .
- Bod x nemůže být ani hraničním bodem A . Víme totiž, že $\partial A = \partial(A^c)$ a z předpokladu uzavřenosti A^c platí $\partial(A^c) \subset A^c$. Tedy celá hranice ∂A leží v A^c . Náš bod x je ale v A .

Jelikož $x \in A$, nemůže být x ani v $\text{ext}(A)$, ani v ∂A . Podle Věty 2.1 musí tedy nutně platit, že $x \in \text{int}(A)$. Protože jsme pro libovolný bod $x \in A$ ukázali, že $x \in \text{int}(A)$, platí $A \subset \text{int}(A)$, a tedy množina A je otevřená. $\square$

Je důležité si uvědomit, že existují množiny, které nejsou ani otevřené, ani uzavřené (např. interval $(a, b]$ v $\mathbb{R}$), a také existují množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené (v metrickém prostoru M jsou to vždy množina $\emptyset$ a celá množina M).

3 Posloupnosti a struktura množin

Pojem konvergence posloupnosti je v metrických prostorech klíčový. Umožňuje nám zkoumat množiny „dynamicky“ a poskytuje alternativní způsob, jak charakterizovat jejich vlastnosti.

3.1 Konvergence posloupností

Definice 3.1 (Konvergentní posloupnost). Řekneme, že posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z metrického prostoru (M, d) **konverguje** k bodu $x \in M$, jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Bod x nazýváme **limitou** posloupnosti a píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ nebo $x_n \rightarrow x$.

Intuitivně to znamená, že se členy posloupnosti x_n s rostoucím n „neomezeně přibližují“ k bodu x . Formálně řečeno, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $d(x_n, x) < \varepsilon$. To je ekvivalentní tomu, že od indexu n_0 dále leží všechny členy posloupnosti v otevřené kouli $B(x, \varepsilon)$.

3.2 Hromadné a izolované body

Definice 3.2 (Hromadný bod). Bod $x \in M$ se nazývá **hromadným bodem** množiny $A \subset M$, jestliže v každém jeho okolí $B(x, \varepsilon)$ leží alespoň jeden od x různý bod z množiny A . Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A' .

Hromadný bod tedy nemusí být prvkem množiny A , ale v jeho „těsné blízkosti“ se musí nacházet nekonečně mnoho bodů z A . Tento topologický pojem lze také elegantně charakterizovat pomocí posloupností, jak ukazuje následující věta.

Věta 3.1 (Sekvenční charakterizace hromadného bodu). *Bod $x \in M$ je hromadným bodem množiny A , právě když existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z A taková, že $x_n \neq x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a zároveň $x_n \rightarrow x$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Nechť x je hromadný bod A . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme poloměr $\varepsilon_n = 1/n$. Podle definice hromadného bodu v každé kouli $B(x, 1/n)$ existuje bod $x_n \in A$ takový, že $x_n \neq x$. Z konstrukce je zřejmé, že $d(x_n, x) < 1/n$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, což znamená $x_n \rightarrow x$.

($\Leftarrow$) Nechť existuje posloupnost $\{x_n\}$ v A s vlastnostmi $x_n \neq x$ a $x_n \rightarrow x$. Zvolme libovolné okolí $B(x, \varepsilon)$. Z definice konvergence víme, že existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Jelikož $x_n \neq x$, našli jsme v tomto okolí od x různý bod z A . Protože okolí bylo libovolné, je x hromadným bodem A . $\square$

Příklad: Uvažujme množinu $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ v prostoru $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou. Bod $x = 0$ je hromadným bodem této množiny. Pro libovolné okolí $B(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ totiž vždy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$, a tedy $1/n \in B(0, \varepsilon)$. Přitom $1/n \in A$ a $1/n \neq 0$. Sekvenční charakterizace (Věta 3.1) to potvrzuje: posloupnost $\{1/n\}$ je tvořena body z A , žádný její člen se nerovná 0 a přesto $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Všimněte si, že samotný hromadný bod 0 není prvkem množiny A .

Definice 3.3 (Izolovaný bod). Bod $x \in A$ se nazývá **izolovaným bodem** množiny A , jestliže existuje takové okolí $B(x, \varepsilon)$, ve kterém neleží žádný jiný bod z množiny A . Tedy $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$.

Příklad: Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3\}$ v $\mathbb{R}$. Každý bod této množiny je izolovaný. Například pro bod $x = 2$ můžeme zvolit $\varepsilon = 0.5$. Pak otevřená koule $B(2, 0.5) = (1.5, 2.5)$ obsahuje z množiny A pouze bod 2. Podobně pro body 1 a 3. Všechny body množiny $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ z předchozího příkladu jsou také izolované.

3.3 Charakterizace uzavřených množin

Spojení pojmů konvergence a hromadných bodů nám dává silný nástroj pro alternativní definici uzavřených množin.

Věta 3.2. *Množina $A \subset M$ je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body (tj. $A' \subset A$).*

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích (ekvivalence).

1. Implikace ($\Rightarrow$): Nechť A je uzavřená, dokážeme, že $A' \subset A$. Předpokládejme, že A je uzavřená. To podle definice znamená, že A obsahuje všechny své hraniční body, tj. $\partial A \subset A$. Zvolme libovolný hromadný bod $x \in A'$. Chceme ukázat, že $x \in A$. Předpokládejme sporem, že $x \notin A$. Protože $x \in A'$, každé okolí $B(x, \varepsilon)$ obsahuje nějaký bod $y \in A$, přičemž $y \neq x$. Zároveň ale $x \notin A$, tedy $x \in A^c$. To znamená, že každé okolí $B(x, \varepsilon)$ obsahuje bod x , který je v A^c . Ukázali jsme, že každé okolí $B(x, \varepsilon)$ obsahuje jak bod z A (totiž y), tak bod z A^c (totiž x). To je ale přesně definice hraničního bodu, tedy $x \in \partial A$. Jelikož A je uzavřená, platí $\partial A \subset A$, z čehož

plyne $x \in A$. To je ve sporu s naším předpokladem, že $x \notin A$. Tudíž předpoklad byl chybný a musí platit $x \in A$. Ukázali jsme, že $A' \subset A$.

2. Implikace ($\Leftarrow$): Nechť $A' \subset A$, dokážeme, že A je uzavřená. Předpokládejme, že $A' \subset A$. Chceme dokázat, že A je uzavřená, tj. že $\partial A \subset A$. Zvolme libovolný hraniční bod $x \in \partial A$. Musíme ukázat, že $x \in A$. Pro bod x mohou nastat dvě možnosti: buď $x \in A$, nebo $x \notin A$.

- Pokud $x \in A$, je důkaz hotov.
- Pokud $x \notin A$: Protože $x \in \partial A$, každé jeho okolí $B(x, \varepsilon)$ musí obsahovat nějaký bod $y \in A$. Jelikož $x \notin A$, musí být tento bod y nutně různý od x . To ale znamená, že v každém okolí $B(x, \varepsilon)$ leží bod $z \in A$ různý od x . To je definice hromadného bodu, takže $x \in A'$. Podle našeho předpokladu ale platí $A' \subset A$, takže $x \in A$. To je ve sporu s předpokladem této odrážky (že $x \notin A$).

Jediná možná varianta tedy je, že $x \in A$. Protože x byl libovolný hraniční bod, dokázali jsme, že $\partial A \subset A$, a tedy množina A je uzavřená. $\square$

Následující věta poskytuje další, často nejužitečnější, charakterizaci uzavřenosti pomocí konvergentních posloupností.

Věta 3.3 (Sekvenční charakterizace uzavřenosti). *Množina $A \subset M$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z A (tj. $x_n \in A$ pro všechna n) platí, že její limita leží také v A (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$).*

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích (ekvivalence).

1. Implikace ($\Rightarrow$): Nechť A je uzavřená, dokážeme sekvenční vlastnost. Předpokládejme, že A je uzavřená. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z A (tj. $x_n \in A$ pro všechna n) a nechť $x_n \rightarrow x$. Musíme dokázat, že $x \in A$. Postupujme sporem. Předpokládejme, že $x \notin A$, tedy $x \in A^c$. Protože A je uzavřená, její doplněk A^c je podle Věty 2.2 otevřený. To znamená, že x je vnitřním bodem A^c . Z definice vnitřního bodu tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že celá otevřená koule $B(x, \varepsilon)$ leží v doplňku, tj. $B(x, \varepsilon) \subset A^c$. Tato koule $B(x, \varepsilon)$ tedy neobsahuje žádný bod z A . My ale předpokládáme, že $x_n \rightarrow x$. Z definice konvergence k tomuto $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n \in B(x, \varepsilon)$. To je spor, protože $x_n \in A$ (z předpokladu o posloupnosti) a zároveň $x_n \in B(x, \varepsilon) \subset A^c$ (z důsledku konvergence a předpokladu sporu). Bod nemůže být zároveň v A i v A^c . Náš původní předpoklad sporem ($x \notin A$) byl chybný. Musí tedy platit $x \in A$.

2. Implikace ($\Leftarrow$): Nechť platí sekvenční vlastnost, dokážeme, že A je uzavřená. Nyní předpokládejme, že pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí, že její limita $\lim x_n$ leží také v A . Chceme dokázat, že A je uzavřená. K tomu nám stačí (podle Věty 3.2) ukázat, že A obsahuje všechny své hromadné body, tj. $A' \subset A$. Zvolme libovolný hromadný bod $x \in A'$. Podle sekvenční charakterizace hromadného bodu (Věta 3.1) víme, že existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $x_n \in A$, $x_n \neq x$ pro všechna n , a $x_n \rightarrow x$. Našli jsme tedy konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ bodů z A , která konverguje k x . Podle našeho výchozího předpokladu (sekvenční vlastnosti) musí limita této posloupnosti, což je bod x , ležet v A . Ukázali jsme, že libovolný bod $x \in A'$ musí ležet v A . Platí tedy $A' \subset A$, a proto je množina A podle Věty 3.2 uzavřená. $\square$

Tato věta říká, že z uzavřené množiny „nelze vykonvergovat ven“. Pokud se posloupnost bodů z A k něčemu blíží, pak se musí blížit k bodu, který je opět v A .

4 Úplné metrické prostory

V předchozí kapitole jsme zavedli pojem konvergentní posloupnosti. Nyní zavedeme blíže související, ale obecnější pojem *cauchyovské posloupnosti*, který nám umožní definovat klíčovou vlastnost metrického prostoru – jeho úplnost.

Definice 4.1 (Cauchyovská posloupnost). Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru (M, d) se nazývá **cauchyovská** (nebo **fundamentální**), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Intuitivně to znamená, že členy posloupnosti se k sobě s rostoucím n „neomezeně přibližují“, bez ohledu na to, zda v daném prostoru existuje jejich limita.

Věta 4.1. *Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost v (M, d) s limitou $x \in M$. Chceme dokázat, že je cauchyovská. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Protože $x_n \rightarrow x$, k číslu $\varepsilon/2 > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \geq n_0$ platí $d(x_k, x) < \varepsilon/2$. Zvolme nyní libovolná $m, n \geq n_0$. Použijeme trojúhelníkovou nerovnost přes bod x :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$$

Protože $m \geq n_0$ i $n \geq n_0$, platí $d(x_m, x) < \varepsilon/2$ a díky symetrii metriky i $d(x, x_n) = d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Dohromady dostáváme:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nalezli jsme hledané n_0 . Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. □

Jak jsme právě dokázali, každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Opačná implikace ale obecně neplatí. A právě to, zda platí, definuje úplnost prostoru.

Definice 4.2 (Úplný metrický prostor). Metrický prostor (M, d) se nazývá **úplný**, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje (tj. má limitu $x \in M$).

Úplný prostor je tedy takový, který „nemá díry“. Pokud se body posloupnosti k sobě chovají tak, „jako by“ měly konvergovat, pak v tomto prostoru skutečně existuje bod, k němuž konvergují.

Příklad 1 (Úplný prostor): Prostor reálných čísel $(\mathbb{R}, d)$ se standardní metrikou $d(x, y) = |x - y|$ je **úplný**. Toto je fundamentální vlastnost, která odlišuje reálná čísla od racionálních. Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má reálnou limitu.

Příklad 2 (Neúplný prostor): Prostor racionálních čísel $(\mathbb{Q}, d)$ se standardní metrikou $d(x, y) = |x - y|$ **není úplný**. Uvažujme posloupnost racionálních aproximací čísla $\sqrt{2}$, například $x_1 = 1, x_2 = 1.4, x_3 = 1.41, x_4 = 1.414, \dots$. Tato posloupnost $\{x_n\}$ je tvořena pouze racionálními čísly (všechny jsou konečné desetinné rozvoje). Protože v $\mathbb{R}$ konverguje k $\sqrt{2}$, je cauchyovská. Je tedy cauchyovská i v $\mathbb{Q}$. Její limita je však $\sqrt{2}$, což není prvek $\mathbb{Q}$. Tato cauchyovská posloupnost tedy v prostoru $\mathbb{Q}$ nemá limitu. Prostor $\mathbb{Q}$ má „díru“ tam, kde by mělo být $\sqrt{2}$.

Pojem	Klíčová charakteristika (Intuitivně)	Příklad v rovině $\mathbb{R}^2$
Vnitřní bod A	Bod $x \in A$, který má celé okolí v A („obklopený“).	Bod $(0,0)$ pro množinu $B((0,0),1)$.
Hraniční bod A	Bod x , jehož každé okolí „protíná“ A i A^c .	Bod $(1,0)$ pro množinu $B((0,0),1)$.
Hromadný bod A	Bod x , ke kterému se „hromadí“ body z A (lze k němu zkonvergovat).	Bod $(1,0)$ pro množinu $B((0,0),1)$.
Izolovaný bod A	Bod $x \in A$, který je „sám“ ve svém okolí (z bodů A).	Bod $(1,1)$ pro množinu $\mathbb{Z}^2$.
Otevřená množina	Množina A , která se rovná svému vnitřku ($A = \text{int}(A)$).	Kruh bez hraniční kružnice $B((0,0),1)$.
Uzavřená množina	Množina A , která obsahuje svou hranici ($A \supset \partial A$), nebo své hromadné body ($A \supset A'$).	Kruh i se svou hranicí $\overline{B((0,0),1)} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, (0,0)) \leq 1\}$.

Tabulka 1: Přehled základních pojmů.