

Metrické prostory

Učební text pro studenty učitelství matematiky

FP TUL

Vítejte v úvodu do metrických prostorů! Tento koncept je zobecněním myšlenky vzdálenosti, kterou intuitivně známe z běžného světa (například z euklidovské geometrie). Definováním „vzdálenosti“ na různých typech množin získáme mocný nástroj pro analýzu a pochopení jejich struktury.

1 Definice metrického prostoru

Představte si, že máte jakoukoliv neprázdnou množinu prvků – mohou to být body v rovině, funkce, posloupnosti, cokoliv. Metrický prostor vznikne, když na této množině zavedeme pojem **vzdálenosti**.

Definice 1.1 (Metrický prostor). Nechť M je neprázdna množina a d je zobrazení $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Dvojici (M, d) nazveme **metrickým prostorem**, jestliže pro všechna $x, y, z \in M$ platí následující čtyři axiomy:

1. **Nezápornost:** $d(x, y) \geq 0$
2. **Totožnost (Identita):** $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. **Symetrie:** $d(x, y) = d(y, x)$
4. **Trojúhelníková nerovnost:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Funkci d nazýváme **metrika**.

Příklad 1.2. Nejznámějším metrickým prostorem je rovina $\mathbb{R}^2$ s **euklidovskou metrikou**, kde vzdálenost mezi body $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ je definována jako:

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Toto je naše standardní představa vzdálenosti, kterou znáte ze školy.

Příklad 1.3. Na **reálné ose** $\mathbb{R}$ (tedy $\mathbb{R}^1$) je geometrická vzdálenost dána jednoduše jako absolutní hodnota rozdílu:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Pro stručnější zápis budeme tento metrický prostor značit $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$.

2 Otevřené a uzavřené množiny

Abychom mohli mluvit o otevřených a uzavřených množinách, musíme nejprve definovat „okolí“ bodu, kterému se zde říká **otevřená koule**.

Otevřená koule $B(x, r)$ se středem v bodě x a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů z M , jejichž vzdálenost od x je menší než r .

$$B(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$$

V rovině $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou je otevřená koule vnitřek kruhu (bez hraniční kružnice).

2.1 Vnitřní bod a Otevřená množina

Definice 2.1 (Vnitřní bod). Bod $x \in A$ se nazývá **vnitřním bodem** množiny A , jestliže existuje takové $r > 0$, že celá otevřená koule $B(x, r)$ leží uvnitř množiny A . Tedy $B(x, r) \subseteq A$.

Definice 2.2 (Otevřená množina). Množina A se nazývá **otevřená**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Příklad 2.3. Uvažujme metrický prostor $(\mathbb{R}, d)$, kde $d(x, y) = |x - y|$, a množinu $A = (1, 4)$. Bod $x = 3$ je **vnitřním bodem** množiny A . **Zdůvodnění:** Podle definice musíme najít $r > 0$ takové, že $B(3, r) \subseteq A$. V tomto prostoru je otevřená koule $B(3, r)$ rovna otevřenému intervalu $(3 - r, 3 + r)$. Zvolíme-li například $r = 1$ (což je $r > 0$), dostaneme otevřenou kouli $B(3, 1) = (3 - 1, 3 + 1) = (2, 4)$. Protože $(2, 4) \subset (1, 4)$, našli jsme požadované r a bod $x = 3$ je vnitřním bodem A .

Příklad 2.4. Množina $A = (1, 4)$ je v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ **otevřená**. **Zdůvodnění:** Podle definice musíme ukázat, že každý bod $x \in A$ je jejím vnitřním bodem. Zvolme libovolné $x \in (1, 4)$. Nyní musíme najít $r > 0$ takové, aby $B(x, r) = (x - r, x + r) \subseteq (1, 4)$. Stačí zvolit r jako menší ze vzdáleností bodu x k hranicím intervalu, tj. $r = \min(x - 1, 4 - x)$. Protože $1 < x < 4$, jsou obě hodnoty $(x - 1)$ i $(4 - x)$ kladné, a tedy i jejich minimum r je kladné. Pro toto r platí $x - r \geq x - (x - 1) = 1$ a $x + r \leq x + (4 - x) = 4$, takže $B(x, r) \subseteq (1, 4)$. Jelikož každý bod množiny A je jejím vnitřním bodem, je množina A otevřená.

2.2 Hraniční bod a Uzavřená množina

Definice 2.5 (Hraniční bod). Bod $x \in M$ se nazývá **hraničním bodem** množiny A , jestliže každá otevřená koule $B(x, r)$ se středem v x obsahuje alespoň jeden bod z množiny A a zároveň alespoň jeden bod, který v A neleží (tj. leží v doplňku $M \setminus A$).

Definice 2.6 (Uzavřená množina). Množina A se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

Příklad 2.7. Uvažujme opět prostor $(\mathbb{R}, d)$ s metrikou $d(x, y) = |x - y|$ a množinu $A = (1, 4)$. Bod $x = 4$ je **hraničním bodem** množiny A . **Zdůvodnění:** Podle definice musíme ukázat, že každá otevřená koule $B(4, r)$ (kde $r > 0$) obsahuje alespoň jeden bod z A a zároveň alespoň jeden bod z doplňku $A^c = (-\infty, 1] \cup [4, \infty)$. Zvolme libovolné $r > 0$. Otevřená koule je $B(4, r) = (4 - r, 4 + r)$.

1. **Průnik s A :** Množina $B(4, r) \cap A = (4 - r, 4 + r) \cap (1, 4) = (\max(1, 4 - r), 4)$. Protože $\max(1, 4 - r) < 4$ pro libovolné $r > 0$, je tento interval vždy neprázdný (obsahuje body "zleva" od 4).
2. **Průnik s A^c :** Množina $B(4, r) \cap A^c = (4 - r, 4 + r) \cap ((-\infty, 1] \cup [4, \infty))$. Tento průnik obsahuje přinejmenším interval $[4, 4 + r)$, který je vždy neprázdný. (Obsahuje například bod $x = 4$, neboť $d(4, 4) = 0 < r$).

Protože každá otevřená koule se středem v $x = 4$ protíná jak A , tak A^c , je $x = 4$ hraničním bodem množiny A . Odtud plyne, že množina A není uzavřená.

2.3 Vnitřek a hranice množiny

Pomocí dříve definovaných pojmů vnitřního a hraničního bodu můžeme nyní definovat množiny, které všechny tyto body sdružují.

Definice 2.8 (Vnitřek, hranice). Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$ je jeho podmnožina.

- **Vnitřkem množiny** A (značíme $\text{int}(A)$ nebo A°) nazýváme množinu všech vnitřních bodů množiny A .
- **Hranicí množiny** A (značíme $\partial(A)$) nazýváme množinu všech hraničních bodů množiny A .

Následující věta shrnuje základní vztahy mezi množinou, jejím vnitřkem a její hranicí, a dává do souvislosti tyto pojmy s definicemi otevřené a uzavřené množiny.

Věta 2.9 (Vlastnosti vnitřku a hranice). *Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Pak platí:*

1. $\text{int}(A) \subseteq A$
2. $A \subseteq \text{int}(A) \cup \partial(A)$
3. Množiny $\text{int}(A)$ a $\partial(A)$ jsou **disjunktní**, tj. $\text{int}(A) \cap \partial(A) = \emptyset$.
4. Množina A je otevřená $\iff A = \text{int}(A)$.
5. Množina A je uzavřená $\iff A = \text{int}(A) \cup \partial(A)$.

Důkaz. Důkazy jednotlivých tvrzení:

1. **($\text{int}(A) \subseteq A$):** Nechť $x \in \text{int}(A)$. Podle definice vnitřku je x vnitřním bodem A . Podle Definice 2.1 (Vnitřní bod) platí $x \in A$. Tvrzení je tedy přímým důsledkem definice.
2. **($A \subseteq \text{int}(A) \cup \partial(A)$):** Zvolme libovolný bod $x \in A$. Musíme ukázat, že x leží buď v $\text{int}(A)$, nebo v $\partial(A)$. Rozlišme dvě možnosti:
 - **Případ 1:** x je vnitřním bodem A . Pak $x \in \text{int}(A)$ a tvrzení platí.
 - **Případ 2:** x není vnitřním bodem A . To znamená, že *neexistuje* žádné $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A$. Jinými slovy, *každá* koule $B(x, r)$ (pro libovolné $r > 0$) není celá v A , tedy musí obsahovat alespoň jeden bod z doplňku $M \setminus A$. Protože $x \in A$, každá koule $B(x, r)$ zároveň obsahuje alespoň jeden bod z A (samotný bod x). Zjistili jsme, že každá koule $B(x, r)$ protíná jak A , tak její doplněk $M \setminus A$. To je ale přesně definice hraničního bodu (Definice 2.3). Tedy $x \in \partial(A)$.

V obou případech $x \in \text{int}(A) \cup \partial(A)$.

3. **(Disjunktnost):** Důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bod x takový, že $x \in \text{int}(A) \cap \partial(A)$.
 - Protože $x \in \text{int}(A)$, existuje $r_1 > 0$ takové, že $B(x, r_1) \subseteq A$.
 - Protože $x \in \partial(A)$, každá otevřená koule se středem v x musí protínat doplněk $M \setminus A$. Tedy i pro r_1 musí platit $B(x, r_1) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$.

Tato dvě tvrzení jsou ve sporu, neboť první říká, že koule $B(x, r_1)$ leží *celá* v A , zatímco druhé říká, že *obsahuje* body mimo A . Náš počáteční předpoklad byl tedy chybný a průnik musí být prázdný.

4. (**A je otevřená** $\iff A = \text{int}(A)$):

- ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že A je otevřená. Dle Definice 2.2 to znamená, že každý bod $x \in A$ je jejím vnitřním bodem. Tedy $A \subseteq \text{int}(A)$. Z bodu 1) tohoto důkazu víme, že $\text{int}(A) \subseteq A$. Z obou inkluzí plyne rovnost $A = \text{int}(A)$.
- ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $A = \text{int}(A)$. To znamená, že každý bod $x \in A$ je prvkem $\text{int}(A)$, tedy je vnitřním bodem množiny A . To je přesně definice otevřené množiny (Definice 2.2).

5. (**A je uzavřená** $\iff A = \text{int}(A) \cup \partial(A)$): Ukážeme dvě implikace:

- ($\Rightarrow$) Předpokládejme $\partial(A) \subseteq A$. Z bodu 2) víme $A \subseteq \text{int}(A) \cup \partial(A)$. Z bodu 1) víme $\text{int}(A) \subseteq A$. Sjednocením $\text{int}(A) \subseteq A$ a $\partial(A) \subseteq A$ (naš předpoklad) dostáváme $\text{int}(A) \cup \partial(A) \subseteq A$. Z obou inkluzí plyne rovnost.
- ($\Leftarrow$) Předpokládejme $A = \text{int}(A) \cup \partial(A)$. Protože pro libovolné množiny B, C a jejich sjednocení platí $B \subseteq B \cup C$, platí i $\partial(A) \subseteq \text{int}(A) \cup \partial(A)$ a odtud plyne $\partial(A) \subseteq A$, a tedy množina A je uzavřená.

Tím jsou všechny ekvivalence dokázány.

□

Poznámka 2.10. Z předchozí věty plyne, že otevřené a uzavřené množiny stojí na opačných koncích spektra ve vztahu ke svým hraničním bodům:

- **Otevřená množina** neobsahuje *žádný* svůj hraniční bod.
- **Uzavřená množina** obsahuje *všechny* své hraniční body.

Existují i množiny, které nejsou ani otevřené, ani uzavřené, např. $A = (1, 4]$ v $\mathbb{R}$ s euklidovskou metrikou. Tato množina obsahuje jen *některé* své hraniční body – obsahuje bod 4, ale neobsahuje bod 1.

Věta 2.11 (Hranice doplňku). *Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Pak pro hranici množiny A a hranici jejího doplňku $A^c = M \setminus A$ platí:*

$$\partial(A) = \partial(A^c)$$

Důkaz. Důkaz plyne přímo z definice hraničního bodu (Definice 2.3).

- Bod x je hraničním bodem A (tj. $x \in \partial(A)$), jestliže každá koule $B(x, r)$ protíná A a zároveň protíná A^c .
- Bod x je hraničním bodem A^c (tj. $x \in \partial(A^c)$), jestliže každá koule $B(x, r)$ protíná A^c a zároveň protíná $(A^c)^c = A$.

Obě podmínky jsou evidentně totožné, proto $\partial(A) = \partial(A^c)$.

□

Následující věta je jedním z nejdůležitějších důsledků vztahu mezi vnitřkem, hranicí a doplňkem. Ukazuje na dualitu mezi otevřenými a uzavřenými množinami.

Věta 2.12 (Vztah otevřených a uzavřených množin). *Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Pak platí:*

Množina A je uzavřená $\iff$ její doplněk A^c je otevřený.

Důkaz. Důkaz provedeme řetězcem ekvivalencí s využitím předchozích definic a vět:

A je **uzavřená**

$\iff A$ obsahuje všechny své hraniční body (Definice 2.4).

$\iff \partial(A) \subseteq A$

$\iff \partial(A^c) \subseteq A$ (dle Věty 2.2 o rovnosti hranic)

$\iff \partial(A^c) \cap A^c = \emptyset$ (každý prvek prostoru leží v právě jedné z množin A, A^c)

$\iff A^c = \text{int}(A^c)$ (Z Věty 2.1 plyne, že $A^c \subseteq \text{int}(A^c) \cup \partial(A^c)$ [bod 2] a že $\text{int}(A^c) \cap \partial(A^c) = \emptyset$ [bod 3]. Pokud $\partial(A^c)$ a A^c nemají žádný společný bod, musí platit $\text{int}(A^c) = A^c$.)

$\iff A^c$ je **otevřená** (dle Věty 2.1, bod 4).

Tím je ekvivalence dokázána. □

3 Posloupnosti a struktura množin

Pojem konvergence posloupnosti je v metrických prostorech klíčový. Umožňuje nám zkoumat množiny „dynamicky“ a poskytuje alternativní způsob, jak charakterizovat jejich vlastnosti.

3.1 Konvergence posloupností

Definice 3.1 (Konvergentní posloupnost). Řekneme, že posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ z metrického prostoru (M, d) **konverguje** k bodu $x \in M$, jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Bod x nazýváme **limitou** posloupnosti a píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ nebo $x_n \rightarrow x$.

Intuitivně to znamená, že se členy posloupnosti x_n s rostoucím n „neomezeně přibližují“ k bodu x . Formálně řečeno, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $d(x_n, x) < \varepsilon$. To je ekvivalentní tomu, že od indexu n_0 dále leží všechny členy posloupnosti v otevřené kouli $B(x, \varepsilon)$.

3.2 Hromadné a izolované body

Definice 3.2 (Hromadný bod). Bod $x \in M$ se nazývá **hromadným bodem** množiny $A \subseteq M$, jestliže v každém jeho okolí $B(x, \varepsilon)$ leží alespoň jeden od x různý bod z množiny A . Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A' .

Hromadný bod tedy nemusí být prvkem množiny A , ale v jeho „těsné blízkosti“ se musí nacházet nekonečně mnoho bodů z A . Tento topologický pojem lze také elegantně charakterizovat pomocí posloupností, jak ukazuje následující věta.

Věta 3.3 (Sekvenční charakterizace hromadného bodu). *Bod $x \in M$ je hromadným bodem množiny A , právě když existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ bodů z A taková, že $x_n \neq x$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a zároveň $x_n \rightarrow x$.*

Důkaz. $(\Rightarrow)$ Nechť x je hromadný bod A . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme poloměr $\varepsilon_n = 1/n$. Podle definice hromadného bodu v každé kouli $B(x, 1/n)$ existuje bod $x_n \in A$ takový, že $x_n \neq x$. Z konstrukce je zřejmé, že $d(x_n, x) < 1/n$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, což znamená $x_n \rightarrow x$.

($\Leftarrow$) Necht' existuje posloupnost $\{x_n\}$ v A s vlastnostmi $x_n \neq x$ a $x_n \rightarrow x$. Zvolme libovolné okolí $B(x, \varepsilon)$. Z definice konvergence víme, že existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Jelikož $x_n \neq x$, našli jsme v tomto okolí od x různý bod z A . Protože okolí bylo libovolné, je x hromadným bodem A . $\square$

Příklad 3.4. Uvažujme množinu $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ v prostoru $\mathbb{R}$ s běžnou metrikou. Bod $x = 0$ je hromadným bodem této množiny. Pro libovolné okolí $B(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ totiž vždy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$, a tedy $1/n \in B(0, \varepsilon)$. Přitom $1/n \in A$ a $1/n \neq 0$. Sekvenční charakterizace (Věta 3.1) to potvrzuje: posloupnost $\{1/n\}$ je tvořena body z A , žádný její člen se nerovná 0 a přesto $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Všimněte si, že samotný hromadný bod 0 není prvkem množiny A .

Definice 3.5 (Izolovaný bod). Bod $x \in A$ se nazývá **izolovaným bodem** množiny A , jestliže existuje takové okolí $B(x, \varepsilon)$, ve kterém neleží žádný jiný bod z množiny A . Tedy $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$.

Příklad 3.6. Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3\}$ v $\mathbb{R}$. Každý bod této množiny je izolovaný. Například pro bod $x = 2$ můžeme zvolit $\varepsilon = 0.5$. Pak otevřená koule $B(2, 0.5) = (1.5, 2.5)$ obsahuje z množiny A pouze bod 2. Podobně pro body 1 a 3. Všechny body množiny $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ z předchozího příkladu jsou také izolované.

3.3 Vztah hromadných, izolovaných a hraničních bodů

Následující věta poskytuje užitečnou charakterizaci hromadných bodů v závislosti na tom, zda leží v samotné množině A , či nikoliv. Spojuje nově definované pojmy hromadného a izolovaného bodu s dříve definovaným pojmem hraničního bodu.

Věta 3.7 (Charakterizace hromadných bodů). *Necht' (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$.*

1. Pro bod $x \in A$ platí:
 x je **hromadným bodem** $A \iff x$ **není izolovaným bodem** A .
2. Pro bod $x \notin A$ (tedy $x \in A^c$) platí:
 x je **hromadným bodem** $A \iff x$ je **hraničním bodem** A .

Důkaz. Důkaz obou tvrzení plyne z porovnání příslušných definic.

1. ($x \in A$):

- ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $x \in A$ je hromadný bod. Dle definice 3.2 v každém okolí $B(x, \varepsilon)$ leží bod $y \in A, y \neq x$. To je v přímém sporu s definicí izolovaného bodu 3.5, která vyžaduje existenci $\varepsilon > 0$, aby $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Bod x tedy není izolovaný.
- ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $x \in A$ není izolovaný bod. Negace definice 3.5 izolovaného bodu říká, že pro *každé* $\varepsilon > 0$ platí $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}$. Jelikož $x \in A$, musí tento průnik vždy obsahovat alespoň jeden další bod $y \in A, y \neq x$. To je přesně definice hromadného bodu.

2. ($x \notin A$):

- ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $x \notin A$ je hromadný bod A . Dle definice 3.2 v každém okolí $B(x, \varepsilon)$ existuje $y \in A$. Abychom ukázali, že x je hraniční bod, musíme ukázat, že $B(x, \varepsilon)$ protíná A i A^c .
 - $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (plyne z definice hromadného bodu).
 - $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ (platí, protože $x \in A^c$ a $x \in B(x, \varepsilon)$).

x je tedy hraničním bodem A .

- ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $x \notin A$ je hraniční bod A . Dle definice 2.5 každé okolí $B(x, \varepsilon)$ musí protínat A . Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Protože $x \notin A$, ale $y \in A$, musí být $y \neq x$. V každém okolí $B(x, \varepsilon)$ tedy leží bod $y \in A, y \neq x$, což je definice hromadného bodu.

□

Věta 3.8 (Charakterizace uzavřené množiny pomocí hromadných bodů). *Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Pak platí:*

*Množina A je **uzavřená** $\iff A' \subseteq A$ (tj. A obsahuje všechny své hromadné body).*

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí dvou implikací s využitím Věty 3.7.

($\Rightarrow$) (**Uzavřená** $\implies A' \subseteq A$) Předpokládejme, že A je uzavřená. Chceme ukázat, že $A' \subseteq A$.

- Nechť $x \in A'$. Musíme ukázat, že $x \in A$.
- Rozlišíme dva případy pro x :
- **1. $x \in A$:** V tomto případě je $x \in A$ a tvrzení triviálně platí.
- **2. $x \notin A$ (tj. $x \in A^c$):** Protože $x \in A'$ (je hromadný bod A) a zároveň $x \notin A$, podle Věty 3.7 (část 2) platí, že x je hraničním bodem A . Tedy $x \in \partial(A)$.
- Jelikož jsme předpokládali, že A je uzavřená, musí A obsahovat všechny své hraniční body (Definice 2.4). Platí tedy $\partial(A) \subseteq A$.
- Z $x \in \partial(A)$ a $\partial(A) \subseteq A$ plyne, že $x \in A$.
- To je ale spor s naším předpokladem pro tento případ ($x \notin A$). Tento případ tedy nemůže nastat.

Jediná možnost je, že $x \in A$. Tím jsme ukázali, že $A' \subseteq A$.

($\Leftarrow$) ($A' \subseteq A \implies$ **Uzavřená**) Předpokládejme, že $A' \subseteq A$. Chceme ukázat, že A je uzavřená.

- Podle Definice 2.4 (Uzavřená množina) stačí ukázat, že A obsahuje všechny své hraniční body, tj. $\partial(A) \subseteq A$.
- Nechť $x \in \partial(A)$. Musíme ukázat, že $x \in A$.
- Opět rozlišíme dva případy pro x :
- **1. $x \in A$:** Tvrzení platí.
- **2. $x \notin A$ (tj. $x \in A^c$):** Protože $x \in \partial(A)$ (je hraniční bod A) a zároveň $x \notin A$, podle Věty 3.7 (část 2) platí, že x je hromadným bodem A . Tedy $x \in A'$.
- Z našeho předpokladu $A' \subseteq A$ nyní plyne, že $x \in A$.
- To je ale spor s předpokladem $x \notin A$. Tento případ tedy nemůže nastat.

Jediná možnost je, že $x \in A$. Tím jsme ukázali, že $\partial(A) \subseteq A$, a tedy A je uzavřená.

□

Věta 3.9 (Sekvenční charakterizace uzavřené množiny). *Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Pak platí:*

*Množina A je **uzavřená**, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z A (tedy $\{x_n\} \subseteq A$), která konverguje k nějakému bodu $x \in M$, platí, že její limita x leží v A .*

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích s využitím Věty 2.12, která říká, že A je uzavřená $\iff A^c$ je otevřená.

($\Rightarrow$) (Předpoklad: A je uzavřená $\implies A$ obsahuje své limity)

- Předpokládejme, že A je uzavřená.
- Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z A (tj. $x_n \in A$ pro všechna n) a nechť $x_n \rightarrow x$. Chceme ukázat, že $x \in A$.
- Postupujme sporem. Předpokládejme, že $x \notin A$, tedy $x \in A^c$.
- Protože A je uzavřená, je její doplněk A^c otevřený (Věta 2.12).
- Podle definice otevřené množiny (Definice 2.2) je x vnitřním bodem A^c , takže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A^c$.
- To znamená, že otevřená koule $B(x, r)$ neobsahuje žádný bod z A .
- Z definice konvergence $x_n \rightarrow x$ ale víme, že k tomuto $r > 0$ (zde $\varepsilon = r$) musí existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n \in B(x, r)$.
- Tedy $x_n \in A^c$ pro $n \geq n_0$. To je ale spor s předpokladem, že $x_n \in A$ pro všechna n .
- Náš počáteční předpoklad ($x \notin A$) byl chybný. Musí tedy platit $x \in A$.

($\Leftarrow$) (Předpoklad: A obsahuje své limity $\implies A$ je uzavřená)

- Předpokládejme, že A obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti svých prvků.
- Chceme ukázat, že A je uzavřená. K tomu (podle Věty 2.12) stačí ukázat, že její doplněk A^c je otevřený.
- Musíme tedy ukázat, že každý bod $x \in A^c$ je vnitřním bodem A^c .
- Zvolme libovolné $x \in A^c$. Chceme najít $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A^c$.
- Postupujme opět sporem. Předpokládejme, že x není vnitřním bodem A^c .
- To znamená, že pro *žádné* $r > 0$ neplatí $B(x, r) \subseteq A^c$.
- Jinými slovy, *každá* otevřená koule $B(x, r)$ musí obsahovat alespoň jeden bod z A . Tedy $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pro všechna $r > 0$.
- Můžeme zkonstruovat posloupnost:
 - Pro $r_1 = 1$ zvolme $x_1 \in B(x, 1) \cap A$.
 - Pro $r_2 = 1/2$ zvolme $x_2 \in B(x, 1/2) \cap A$.
 - Pro $r_n = 1/n$ zvolme $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$.
- Tím jsme získali posloupnost $\{x_n\} \subseteq A$.

- Z konstrukce platí $d(x_n, x) < 1/n$ pro každé n . Z toho plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, a tedy $x_n \rightarrow x$.
- Našli jsme konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků z A , jejíž limita je x .
- Podle předpokladu této implikace musí A obsahovat tuto limitu. Tedy $x \in A$.
- To je ale spor s naší volbou $x \in A^c$.
- Náš předpoklad (x není vnitřním bodem A^c) byl chybný.
- Bod x je tedy vnitřním bodem A^c . Jelikož x bylo libovolné, je A^c otevřená množina.
- Tím je dokázáno, že A je uzavřená.

□

4 Kompaktnost

Zatímco uzavřenost a otevřenost nám pomohly pochopit *lokální* vlastnosti množin (co se děje v okolí bodů), kompaktnost popisuje *globální* vlastnost, která v metrických prostorech úzce souvisí s konečností. V euklidovských prostorech $\mathbb{R}^n$ (s běžnou metrikou) platí (dle Heine-Borelovy věty), že kompaktní množiny jsou přesně ty, které jsou **uzavřené a omezené**.

V obecných metrických prostorech je situace složitější, ale ekvivalentní definicí (známou jako sekvenční kompaktnost) je následující:

Definice 4.1 (Kompaktní množina (sekvenční)). Nechť (M, d) je metrický prostor. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq M$ je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z A (tedy $\{x_n\} \subseteq A$) lze vybrat **konvergentní podposloupnost** $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, jejíž limita x leží v A .

$$A \text{ je kompaktní} \iff (\forall \{x_n\} \subseteq A)(\exists \{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\})(\exists x \in A)(x_{n_k} \rightarrow x)$$

Věta 4.2 (Kompaktní množina je uzavřená). *Nechť (M, d) je metrický prostor. Je-li množina $A \subseteq M$ kompaktní, pak je A uzavřená.*

Důkaz. Chceme dokázat, že A je uzavřená množina.

- Využijeme k tomu sekvenční charakterizaci uzavřené množiny (Věta 3.9). Stačí nám ukázat, že A obsahuje limitu každé konvergentní posloupnosti svých prvků.
- Zvolme tedy libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\{x_n\} \subseteq A$ (všechny její členy leží v A) a která je konvergentní, tj. $x_n \rightarrow x$ pro nějaké $x \in M$.
- Musíme ukázat, že $x \in A$.
- Víme, že A je kompaktní. Z Definice 4.1 (sekvenční kompaktnost) plyne, že z posloupnosti $\{x_n\}$ (která je celá v A) lze vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k nějakému bodu $y \in A$.
- Nyní máme:
 1. Celá posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x .
 2. Vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konverguje k y , kde $y \in A$.

- Z vlastností konvergence v metrických prostorech víme, že pokud posloupnost konverguje k nějakému limitnímu bodu, pak každá její podposloupnost musí konvergovat k témuž limitnímu bodu.
- Proto musí platit $x = y$.
- Jelikož $y \in A$, plyne z toho, že $x \in A$.
- Tím jsme dokázali, že limita x naší libovolné konvergentní posloupnosti z A leží v A .
- Podle Věty 3.9 je tedy množina A uzavřená.

□

Definice 4.3 (Omezená množina). Necht' (M, d) je metrický prostor. Řekneme, že podmnožina $A \subseteq M$ je **omezená**, jestliže je obsažena v nějaké otevřené kouli.

$$A \text{ je omezená} \iff (\exists x_0 \in M)(\exists r > 0)(A \subseteq B(x_0, r))$$

Věta 4.4 (Kompaktní množina je omezená). Necht' (M, d) je metrický prostor. Je-li množina $A \subseteq M$ kompaktní, pak je A omezená.

Důkaz. Důkaz provedeme nepřímou. Z předpokladu neomezenosti odvodíme existenci posloupnosti $x_n \in A$ takové, že pro každou dvojici x_n, x_m jejích členů platí $d(x_n, x_m) \geq 1$. Tato nerovnost pak platí i pro každou vybranou podposloupnost. Pro $\varepsilon = 1/2$ pak z požadavku konvergence posloupnosti a z trojúhelníkové nerovnosti plyne pro n, m větší než vhodně zvolené n_0

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 1/2 + 1/2 = 1$$

Proto nemůže být žádná vybraná posloupnost konvergentní a tedy množina A není kompaktní.

Pojďme zkonstruovat posloupnost. Protože A není omezená, je neprázdná, zvolme $x_1 \in A$ libovolně. Při konstrukci dalších členů posloupnosti budeme vycházet z toho, že pro každý poloměr $r > 0$ obsahuje koule $B(x_1, r)$ alespoň jeden bod z množiny A . Poloměr koule r budeme konstruovat tak, aby nový člen posloupnosti x_n měl vzdálenost od každého předchozího členu x_m alespoň jedna. Formálně zapsáno

$$\forall m \in \mathbb{N}, m < n : d(x_n, x_m) \geq 1 \quad (1)$$

Pro $n = 2$ zvolíme poloměr $r = d(x_1, x_2)$. Pak pro $x_2 \notin B(x_1, r)$ platí (1).

Pro $n = 3$ zvolíme poloměr r splňující

- $r \geq 1$, pak z $x_3 \notin B(x_1, r)$ plyne $d(x_1, x_3) \geq 1$.
- $r \geq d(x_1, x_2) + 1$, pak z trojúhelníkové nerovnosti plyne $d(x_2, x_3) \geq d(x_1, x_3) - d(x_1, x_2)$ a z $x_3 \notin B(x_1, r)$ pak plyne $d(x_2, x_3) \geq 1$.

Takové r je například $r = \max\{1, 1 + d(x_1, x_2)\}$.

Pro $n = 4$ zvolíme poloměr r

$$r = \max\{1, 1 + d(x_1, x_2), 1 + d(x_1, x_3)\}$$

Pak pro $x_4 \notin B(x_1, r)$ platí

- $d(x_4, x_1) \geq 1$
- $d(x_4, x_2) \geq d(x_4, x_1) - d(x_1, x_2) \geq r - d(x_1, x_2) \geq 1$
- analogicky dostaneme $d(x_4, x_3) \geq 1$

Analogicky zkonstruuujeme x_n pro $n = 5, 6, \dots$ □

Poznámka 4.5. Věty 4.2 a 4.4 nám říkají, že každá kompaktní množina je uzavřená a omezená. V obecných metrických prostorech **neplatí** opačná implikace, na rozdíl od $\mathbb{R}^n$, jak tvrdí následující věta.

Věta 4.6 (Heine-Borelova věta v $\mathbb{R}^n$). *V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ (s běžnou metrikou d_e) platí následující ekvivalence:*

*Podmnožina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **kompaktní** $\iff A$ je **uzavřená a omezená**.*

*Náčrt důkazu (směru $\Leftarrow$). Důkaz, že uzavřená a omezená množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní, se opírá o **Bolzano-Weierstrassovu větu** v $\mathbb{R}^n$. Ta říká, že každá omezená posloupnost v $\mathbb{R}^n$ má konvergentní podposloupnost.*

Chceme-li ukázat, že A je (sekvenčně) kompaktní, vezmeme libovolnou posloupnost (x_k) v A . Protože A je omezená, je i (x_k) omezená. Nyní stačí ukázat, že z ní lze vybrat podposloupnost, která konverguje k bodu x , který je (díky uzavřenosti A) také v A .

Myšlenky důkazu Bolzano-Weierstrassovy věty (metodou půlení intervalů) jsou následující:

- **1. Omezenost a hyperkrychle:** Mějme omezenou posloupnost (x_k) v $\mathbb{R}^n$. Protože je omezená, můžeme celou posloupnost uzavřít do jedné velké n -rozměrné uzavřené hyperkrychle H_0 .
- **2. Dělení (Metoda půlení):** Hyperkrychli H_0 rozdělíme „v půli“ v každém z n rozměrů. Tím získáme 2^n menších, uzavřených hyperkrychlí, které dohromady pokrývají celou H_0 .
- **3. Výběr (Dirichletův princip):** Posloupnost (x_k) má nekonečně mnoho členů. Protože 2^n je konečný počet, alespoň jedna z těchto menších hyperkrychlí – nazvěme ji H_1 – musí obsahovat **nekonečně mnoho členů** původní posloupnosti.
- **4. Iterace a vnořené množiny:** Tento proces opakujeme: H_1 rozdělíme a vybereme H_2 , která má nekonečně mnoho členů, atd. Získáme tak posloupnost vnořených, uzavřených hyperkrychlí:

$$H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots$$

Důležité je, že průměr (diameter) těchto hyperkrychlí konverguje k nule, $\text{diam}(H_k) \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$.

- **5. Nalezení limitního bodu (Cantorova věta):** Protože $\mathbb{R}^n$ je úplný prostor, můžeme použít Cantorovu větu o vnořených uzavřených množinách. Průnik tohoto systému vnořených množin je neprázdný a obsahuje **přesně jeden bod** x .

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} H_k = \{x\}$$

- **6. Konstrukce podposloupnosti:** Nyní vybereme podposloupnost (x_{k_j}) tak, že vezmeme jeden člen x_{k_j} z každé hyperkrychle H_j (přičemž dbáme na to, aby indexy rostly: $k_1 < k_2 < \dots$).

- **7. Důkaz konvergence:** Pro takto vybranou podposloupnost platí, že $x \in H_j$ (protože x je v průniku všech) a $x_{k_j} \in H_j$ (dle konstrukce). Vzdálenost mezi nimi je tedy omezena průměrem hyperkrychle:

$$d(x, x_{k_j}) \leq \text{diam}(H_j)$$

A protože $\text{diam}(H_j) \rightarrow 0$, musí platit, že $x_{k_j} \rightarrow x$. Našli jsme tedy konvergentní podposloupnost.

Protože množina A z věty Heine-Borel byla **uzavřená** a všechny členy x_{k_j} ležely v A , musí i jejich limita x ležet v A . Tím je důkaz dokončen. $\square$

5 Spojitá zobrazení

Nyní, když jsme definovali základní vlastnosti množin (otevřenost, uzavřenost, kompaktnost), můžeme definovat klíčovou vlastnost zobrazení (funkcí) mezi metrickými prostory.

Definice 5.1 (Spojité zobrazení). Necht' (M, d_M) a (P, d_P) jsou dva metrické prostory.

1. Řekneme, že zobrazení $f : M \rightarrow P$ je **spojité v bodě** $x_0 \in M$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body $x \in M$ platí:

$$d_M(x, x_0) < \delta \implies d_P(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(Jinými slovy: vzor δ -okolí bodu x_0 se zobrazí do ε -okolí bodu $f(x_0)$.)

2. Řekneme, že zobrazení $f : M \rightarrow P$ je **spojité** (na M), jestliže je spojité v každém bodě $x_0 \in M$.

Jednou z nejdůležitějších aplikací kompaktnosti je záruka existence extrémů pro reálné spojitě funkce, známá jako Weierstrassova věta.

Věta 5.2 (Weierstrassova věta o existenci extrémů). Necht' (M, d) je metrický prostor, $A \subseteq M$ je **kompaktní neprázdna množina** a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá funkce** (kde $\mathbb{R}$ uvažujeme s běžnou metrikou $d(a, b) = |a - b|$).

Pak funkce f nabývá na množině A svého maxima a minima. Tj. existují body $x_{\min} \in A$ a $x_{\max} \in A$ takové, že:

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{a} \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in A} f(x)$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro maximum (existence minima je analogická). Důkaz má dvě části:

1. Ukážeme, že obraz $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$.
2. Ukážeme, že kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$ obsahuje své supremum.

Krok 1: Obraz kompaktní množiny je kompaktní. Chceme ukázat, že $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní. Použijeme sekvenční definici (Definice 4.1).

- Necht' $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost prvků z $f(A)$.
- Z definice obrazu $f(A)$ víme, že pro každé y_n existuje (alespoň jeden) vzor $x_n \in A$ takový, že $f(x_n) = y_n$.
- Tím jsme získali posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z A .

- Protože A je kompaktní (z předpokladu věty), musí existovat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ konvergující k nějakému bodu $x_0 \in A$.
- Protože f je spojitá (v bodě x_0), musí pro tuto podposloupnost platit (ze sekvenční definice spojitosti, která je ekvivalentní ε - δ definici), že:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

- Ale $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$. Našli jsme tedy podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ původní posloupnosti $\{y_n\}$.
- Tato podposloupnost konverguje: $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = f(x_0)$.
- Jelikož $x_0 \in A$, limita $f(x_0)$ je prvkem $f(A)$.
- Z libovolné posloupnosti y_n v $f(A)$ jsme vybrali konvergentní podposloupnost y_{n_k} , jejíž limita leží v $f(A)$.
- To je přesně definice toho, že $f(A)$ je kompaktní množina.

Krok 2: Kompaktní množina v $\mathbb{R}$ nabývá svého suprema.

- Z Kroku 1 víme, že $f(A)$ je kompaktní.
- Podle Vět 4.2 a 4.4 (které platí v každém metrickém prostoru, tedy i v $\mathbb{R}$) platí, že $f(A)$ je **uzavřená** a **omezená**.
- Protože $f(A)$ je omezená (a neprázdná, $A \neq \emptyset$), z axiomu úplnosti $\mathbb{R}$ víme, že existuje její konečné supremum $S = \sup f(A)$.
- Z definice suprema platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prvek $y_n \in f(A)$ takový, že $S - \frac{1}{n} < y_n \leq S$.
- Z věty o dvou strážnících (v $\mathbb{R}$) plyne, že posloupnost y_n konverguje k S .
- Tedy: $\{y_n\} \subseteq f(A)$ a $\lim y_n = S$.
- Protože $f(A)$ je **uzavřená** množina, musí podle sekvenční charakterizace (Věta 3.9) obsahovat limitu každé konvergentní posloupnosti svých prvků.
- Z toho plyne, že $S \in f(A)$.
- Našli jsme tedy prvek $S \in f(A)$, který je supremem $f(A)$. To znamená, že existuje $x_{\max} \in A$ takové, že $f(x_{\max}) = S$.

Důkaz existence minima $I = \inf f(A)$ je zcela analogický (pracuje se s posloupností $I \leq y_n < I + \frac{1}{n}$). $\square$

6 Úplné metrické prostory

V předchozí kapitole jsme zavedli pojem konvergentní posloupnosti. Nyní zavedeme blíže související, ale obecnější pojem *cauchyovské posloupnosti*, který nám umožní definovat klíčovou vlastnost metrického prostoru – jeho úplnost.

Definice 6.1 (Cauchyovská posloupnost). Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v metrickém prostoru (M, d) se nazývá **cauchyovská** (nebo **fundamentální**), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Intuitivně to znamená, že členy posloupnosti se k sobě s rostoucím n „neomezeně přibližují“, bez ohledu na to, zda v daném prostoru existuje jejich limita.

Věta 6.2. *Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost v (M, d) s limitou $x \in M$. Chceme dokázat, že je cauchyovská. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Protože $x_n \rightarrow x$, k číslu $\varepsilon/2 > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \geq n_0$ platí $d(x_k, x) < \varepsilon/2$. Zvolme nyní libovolná $m, n \geq n_0$. Použijeme trojúhelníkovou nerovnost přes bod x :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$$

Protože $m \geq n_0$ i $n \geq n_0$, platí $d(x_m, x) < \varepsilon/2$ a díky symetrii metriky i $d(x, x_n) = d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Dohromady dostáváme:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nalezli jsme hledané n_0 . Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. □

Jak jsme právě dokázali, každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Opačná implikace ale obecně neplatí. A právě to, zda platí, definuje úplnost prostoru.

Definice 6.3 (Úplný metrický prostor). Metrický prostor (M, d) se nazývá **úplný**, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje (tj. má limitu $x \in M$).

Úplný prostor je tedy takový, který „nemá díry“. Pokud se body posloupnosti k sobě chovají tak, „jako by“ měly konvergovat, pak v tomto prostoru skutečně existuje bod, k němuž konvergují.

Příklad 6.4 (Úplný prostor). Prostor reálných čísel $(\mathbb{R}, d)$ se standardní metrikou $d(x, y) = |x - y|$ je **úplný**. Toto je fundamentální vlastnost, která odlišuje reálná čísla od racionálních. Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má reálnou limitu.

Příklad 6.5 (Neúplný prostor). Prostor racionálních čísel $(\mathbb{Q}, d)$ se standardní metrikou $d(x, y) = |x - y|$ **není úplný**. Uvažujme posloupnost racionálních aproximací čísla $\sqrt{2}$, například $x_1 = 1$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 1.41$, $x_4 = 1.414, \dots$. Tato posloupnost $\{x_n\}$ je tvořena pouze racionálními čísly (všechny jsou konečné desetinné rozvoje). Protože v $\mathbb{R}$ konverguje k $\sqrt{2}$, je cauchyovská. Je tedy cauchyovská i v $\mathbb{Q}$. Její limita je však $\sqrt{2}$, což není prvek $\mathbb{Q}$. Tato cauchyovská posloupnost tedy v prostoru $\mathbb{Q}$ nemá limitu. Prostor $\mathbb{Q}$ má „díru“ tam, kde by mělo být $\sqrt{2}$.