

Dvojný integrál v polárních souřadnicích

text pro studenty učitelství matematiky

FP TUL

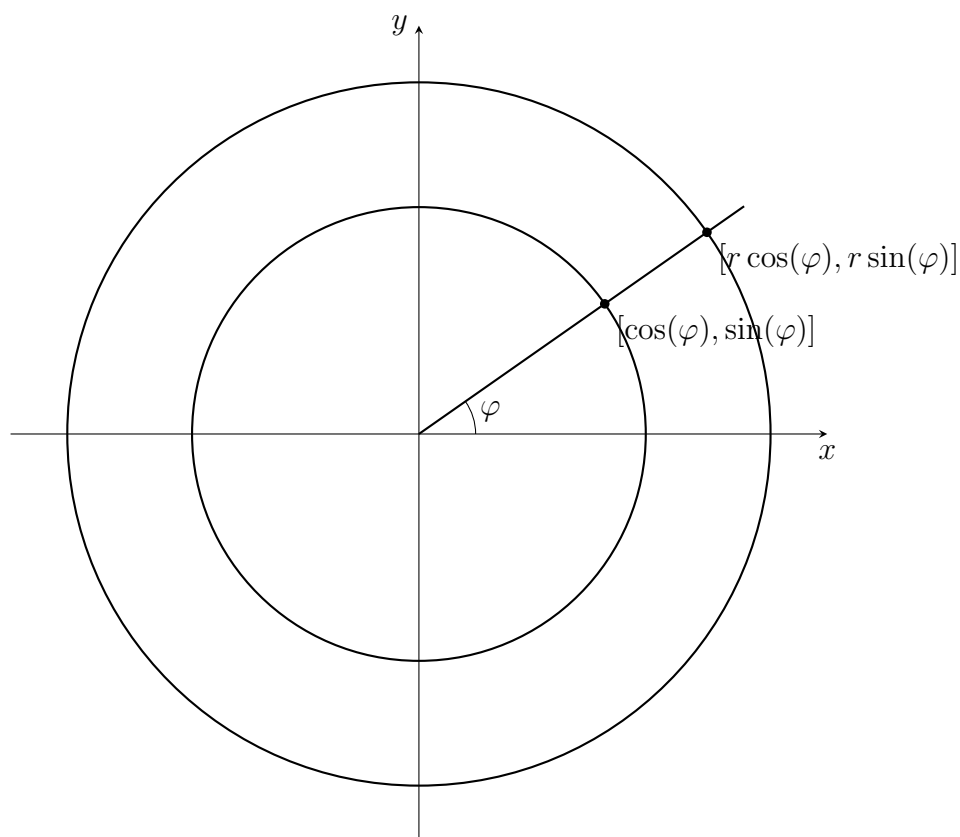
Martina Šimůnková*

16. prosince 2025

1 Polární souřadnice

Na obrázku jsou znázorněny polární souřadnice bodů v rovině. Vycházíme z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici: průsečík polopřímky svírající s osou x úhel φ s kružnicí $r = 1$ má souřadnice $[\cos(\varphi), \sin(\varphi)]$. Vynásobením těchto souřadnic faktorem r dostaneme bod na kružnici o poloměru r , tedy $[r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)]$.

Čísla r , φ nazýváme polárními souřadnicemi bodu $[x, y] = [r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)]$.



*Obrázky byly vytvořeny s pomocí ChatGPT, verze 5.2

Souřadnici r bodu A můžeme popsat jako velikost průvodiče bodu A případně jako vzdálenost bodu A od počátku souřadného systému.

Souřadnici φ bodu A můžeme popsat jako orientovaný úhel, který svírá průvodič bodu A s kladnou poloosou x . Znaménko úhlu je dané znaménkem orientace, přitom za kladný směr považujeme otáčení proti směru hodinových ručiček.

Například ve čtvrtém kvadrantu může být úhel φ buď záporný $\varphi \in (-\pi/2, 0)$ nebo kladný $\varphi \in (3\pi/2, 2\pi)$. Záleží na směru, který vybereme.

Vzorce pro převod polárních souřadnic na kartézské tedy jsou

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Pro opačný převod použijeme pro souřadnici r Pythagorovu větu. Úhel φ spočítáme z podílu $y/x = \operatorname{arctg}(\varphi)$.

V prvním a čtvrtém kvadrantu dostaneme vztahy

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}(y/x)\end{aligned}$$

Zde jsme ve čtvrtém kvadrantu zvolili záporný směr. Při volbě kladného směru dostaneme $\varphi = 2\pi + \operatorname{arctg}(y/x)$.

Ve druhém a třetím kvadrantu dostaneme vztahy

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \pi + \operatorname{arctg}(y/x)\end{aligned}$$

Pro osu y pak: pro kladnou poloosu $\varphi = \pi/2$ a pro zápornou poloosu $\varphi = 3\pi/2$ nebo případně $\varphi = -\pi/2$.

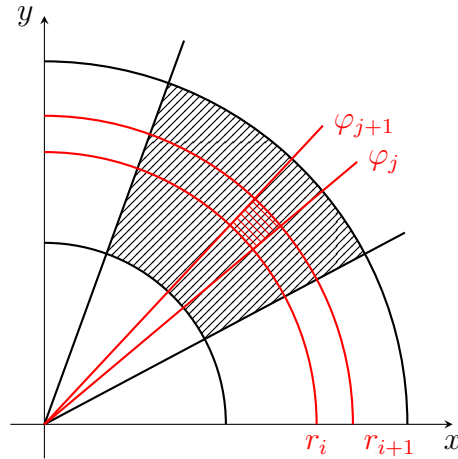
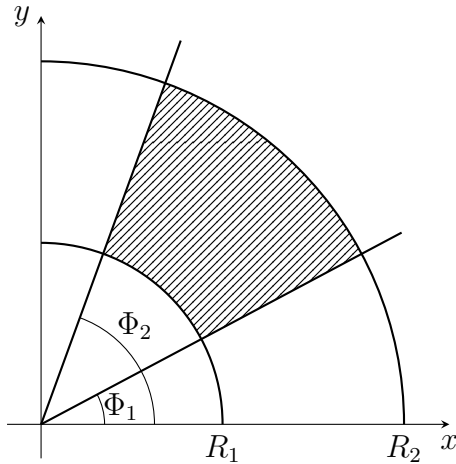
Zbývá počátek, bod $[0,0]$ pro který polární souřadnici φ nedefinujeme. Je to zároveň jediný bod, pro který má druhá polární souřadnice nulovou hodnotu: $r = 0$.

2 Výseč mezikruží

Na obrázcích je pro poloměry $R_1, R_2 > 0$, $R_1 < R_2$ vyšrafovaná výseč mezikruží mezi kružnicemi o poloměrech R_1, R_2 vytknutá úhlem o velikosti $\Phi_2 - \Phi_1$. Výseč formálně popíšeme

$$V = \{[r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)] : r \in [R_1, R_2], \varphi \in [\Phi_1, \Phi_2]\}$$

Zápis čteme: množina V je tvořena uspořádanými dvojicemi $[r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)]$, kde $r \in [R_1, R_2]$ a $\varphi \in [\Phi_1, \Phi_2]$.



Dvojný integrál definujeme analogicky jako v kartézských souřadnicích. Intervaly $[R_1, R_2]$, $[\Phi_1, \Phi_2]$ rozdělíme dělicími body na menší intervaly. Na obrázku vpravo vidíme výseč určenou dvojicí intervalů $[r_i, r_{i+1}]$, $[\varphi_j, \varphi_{j+1}]$.

Analogicky jako v kartézských souřadnicích definujeme množinu funkčních hodnot

$$f_{ij} = \{f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) : r \in [r_i, r_{i+1}], \varphi \in [\varphi_j, \varphi_{j+1}]\}$$

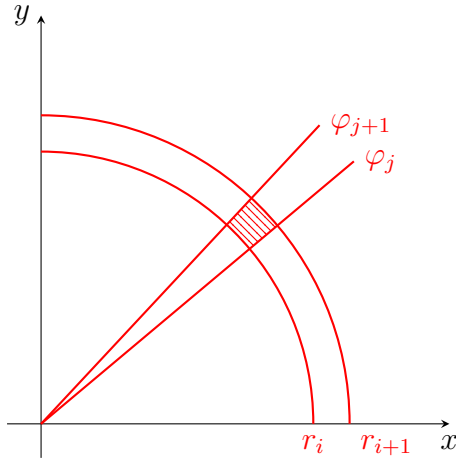
Supremum a infimum této množiny označíme

$$H_{ij} = \sup f_{ij}, \quad D_{ij} = \inf f_{ij}$$

K napsání vzorce pro horní a dolní integrální součet potřebujeme znát vzorec pro obsah výseče mezikruží. Odvodíme ho v následující kapitole.

3 Velikost elementárního obsahu

Na obrázku je vyšrafovaná výseč mezikruží mezi kružnicemi o poloměrech r_i, r_{i+1} vytknutá úhlem o velikosti $\varphi_{j+1} - \varphi_j$.



Vypočteme obsah vyšrafované oblasti. Obsah celého mezikruží S_m vypočteme jako rozdíl obsahu většího a menšího kruhu

$$\begin{aligned} S_m &= \pi r_{i+1}^2 - \pi r_i^2 \\ &= \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2) \end{aligned}$$

Obsah výseče S_v je úměrná velikosti úhlu a pro celý úhel $\Delta\Phi = 2\pi$ je rovna ploše mezikruží. Tedy

$$S_v = \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{2\pi} S_m$$

Po dosazení za plochu S_m a po pokrácení faktorem π dostaneme

$$S_v = \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{2} (r_{i+1}^2 - r_i^2)$$

Pro další úpravu použijeme vzorec pro rozdíl čtverců

$$r_{i+1}^2 - r_i^2 = (r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} + r_i)$$

a označíme

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i, \quad \Delta\varphi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j,$$

Dostaneme

$$S_v = \frac{\Delta\varphi_j}{2} \Delta r_i (r_{i+1} + r_i)$$

a po přeskupení členů dostaneme

$$S_v = \Delta\varphi_j \Delta r_i \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \tag{1}$$

4 Dvojný integrál počítaný v polárních souřadnicích

Nyní přikročíme k definici horních a dolních integrálních součtů.

Označme dělení intervalu $[R_1, R_2]$

$$I = \{r_i : i \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad r_i < r_{i+1} \text{ pro } i \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}$$

a dělení intervalu $[\Phi_1, \Phi_2]$

$$J = \{\varphi_j : j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \varphi_j < \varphi_{j+1} \text{ pro } j \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

Dolní integrální součet pak získáme posčítání součinu infim D_{ij} a elementárních obsahů $(r_{i+1} - r_i)(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$. Dostaneme

$$D_{I,J,f} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} D_{ij} (r_{i+1} - r_i) (\varphi_{j+1} - \varphi_j) \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$$

Analogicky dostaneme horní integrální součet

$$H_{I,J,f} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} H_{ij} (r_{i+1} - r_i) (\varphi_{j+1} - \varphi_j) \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$$

Horním integrálem funkce f na výseči mezikruží V nazveme číslo

$$\overline{\iint_V f} = \inf \{H_{I,J,f} : \text{dělení } I \text{ intervalu } [R_1, R_2], \text{ dělení } J \text{ intervalu } [\Phi_1, \Phi_2]\}$$

Dolním integrálem funkce f na výseči mezikruží V nazveme číslo

$$\underline{\iint_V f} = \sup \{D_{I,J,f} : \text{dělení } I \text{ intervalu } [R_1, R_2], \text{ dělení } J \text{ intervalu } [\Phi_1, \Phi_2]\}$$

Funkci f nazveme integrovatelnou na výseči mezikruží V , pokud platí

$$\overline{\iint_V f} = \underline{\iint_V f}$$

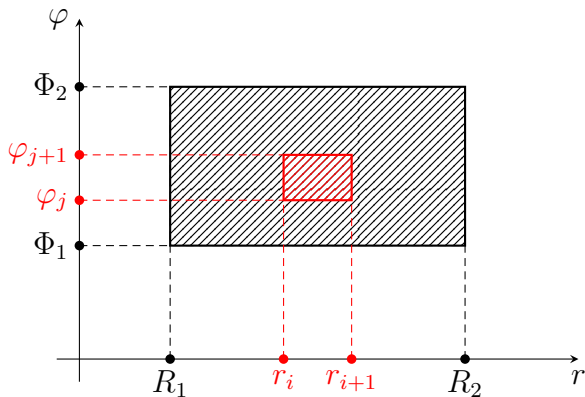
a tuto společnou hodnotu nazýváme dvojným integrálem funkce f na výseči mezikruží V .

5 Metoda výpočtu

K výpočtu dvojného integrálu funkce $(x, y) \mapsto f(x, y)$ přes výseč mezikruží V

$$V = \{[r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)] : r \in [R_1, R_2], \varphi \in [\Phi_1, \Phi_2]\}$$

použijeme dvojný integrál z funkce $(r, \varphi) \mapsto r f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ přes obdélník $[R_1, R_2] \times [\Phi_1, \Phi_2]$. Tento dvojný integrál pak spočítáme pomocí Fubiniovy věty.



Náš výpočet stojí na tvrzení zformulovaném ve větě.

Věta (o substituci dvojného integrálu do polárních souřadnic). Nechť V je výseč mezikruží

$$V = \{[r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)] : r \in [R_1, R_2], \varphi \in [\Phi_1, \Phi_2]\}$$

Nechť funkce f je spojitá na V .

Nechť O je obdélník

$$O = [R_1, R_2] \times [\Phi_1, \Phi_2]$$

Nechť $\tilde{f}$ je funkce definovaná na obdélníku O vztahem

$$\tilde{f}(r, \varphi) = r f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

Pak dvojný integrál funkce f na množině V je roven dvojnému integrálu funkce $\tilde{f}$ na množině O .

Hlavní myšlenka důkazu je:

ukázat, že pro dostatečně jemné dělení obdélníku O ($r_{i+1} - r_i < \delta$) se suprema/infima hodnot funkce $\tilde{f}$ liší málo (nejvýše o ε) od suprema funkce f vynásobeného $(r_{i+1} + r_i)/2$. Jinými slovy: nevadí záměna r za $(r_{i+1} + r_i)/2$.

Odtud pak plyne rovnost horních/dolních integrálů a odtud tvrzení věty.