

Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Materiál pro studenty učitelství matematiky

Při studiu posloupností funkcí se setkáváme s různými typy konvergence. Dva základní a nejdůležitější pojmy jsou bodová a stejnoměrná konvergence. Pochopení rozdílů mezi nimi je klíčové pro další studium matematické analýzy, zejména pro otázky záměny limity a integrálu či derivace.

1. Bodová konvergence

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na množině M konverguje **bodově** k funkci f na M , jestliže pro každé pevně zvolené $x_0 \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu $f(x_0)$.

Definice (formálně):

$$\forall x \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Klíčové je, že přirozené číslo n_0 (index, od kterého jsou členy posloupnosti "dostatečně blízko" limitě) může záviset jak na volbě ε , tak na volbě bodu x . Pro různá x můžeme potřebovat různě velká n_0 , aby byla splněna podmínka konvergence. Značíme: $f_n \rightarrow f$ na M .

2. Stejnoměrná konvergence

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na množině M konverguje **stejnoměrně** k funkci f na M , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové n_0 , že pro všechna $n \geq n_0$ a pro **všechna** $x \in M$ platí nerovnost $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

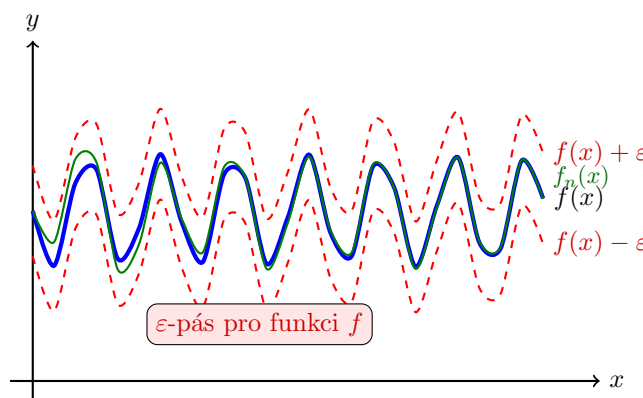
Definice (formálně):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \forall x \in M : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zásadní rozdíl je v pozici kvantifikátoru $\forall x \in M$. Zde n_0 závisí **pouze** na ε , nikoli na konkrétním bodě x . To znamená, že od jistého indexu n_0 se grafy všech následujících funkcí f_n musí nacházet v " ε -ovém pásu" okolo grafu limitní funkce f na celé množině M . Stejnoměrná konvergence je tedy silnější pojem než bodová konvergence. Značíme: $f_n \rightrightarrows f$ na M .

3. Grafické znázornění

Následující graf ilustruje limitní funkci f a její ε -okolí. Pro stejnoměrnou konvergenci musí od určitého indexu n_0 ležet grafy všech funkcí f_n (pro $n \geq n_0$) kompletně uvnitř tohoto červeně vyznačeného pásu.



4. Jak zjišťovat stejnoměrnou konvergenci

Zatímco bodovou konvergenci ověříme "jednoduše" zlimitováním funkce $f_n(x)$ pro pevné x , pro stejnoměrnou konvergenci potřebujeme silnější nástroje. Následující věty jsou klíčové.

Nutná podmínka: Z definice je zřejmé, že pokud posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f na M stejnoměrně, pak k ní na M konverguje i bodově. Pokud tedy posloupnost nekonverguje bodově, nemůže konvergovat ani stejnoměrně. Prvním krokem je tedy vždy nalezení bodové limity.

Postačující a nutná podmínka (supremové kritérium): Toto je nejdůležitější praktický nástroj. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M právě tehdy, když platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Přeformulace a význam: Prakticky to znamená, že pro každé n najdeme největší "svislou" vzdálenost mezi grafy funkcí f_n a f na celé množině M . Tuto maximální odchylku označíme $a_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$. Pokud tato posloupnost maximálních odchylek $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jde k nule, pak je konvergence stejnoměrná.

5. Vlastnosti a význam stejnoměrné konvergence

Stejnoměrná konvergence je silnější pojem než bodová konvergence, a proto nám zaručuje, že některé důležité vlastnosti funkcí f_n se přenesou i na limitní funkci f . Následující věty (uvedené bez důkazů) jsou pilíři matematické analýzy.

Spojitosť limitní funkce

Věta: Necht' $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu I , která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci f . Potom je i funkce f spojitá na intervalu I .

Přeformulace a význam: Tuto větu lze chápat tak, že "stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce". Bodová konvergence nám spojitost limitní funkce nezaručí. Tato vlastnost je zásadní, protože nám dovoluje pracovat s limitní funkcí s jistotou, že v ní nevzniknou "skoky" nebo nespojitosti, pokud byly původní funkce "slušné" (tj. spojitě).

Záměna limity a integrálu

Věta: Necht' $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí integrovatelných na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci f . Potom je i funkce f integrovatelná na $[a, b]$ a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Přeformulace a význam: Věta říká, že při stejnoměrné konvergenci můžeme "prohodit" operátory limity a integrálu. Tedy limita integrálů je rovna integrálu z limity. To nám extrémně zjednodušuje výpočty, protože často je mnohem snazší zintegrovat již zlimitovanou, a tedy jednodušší, funkci f než počítat integrály složitých funkcí f_n a z výsledku pak dělat limitu.

Záměna limity a derivace

Věta: Necht' $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Necht' dále platí:

1. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$.
2. Posloupnost derivací $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně na I k funkci g .

Potom posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně na I k nějaké funkci f , která má na I derivaci, a platí $f' = g$. Tedy:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Přeformulace a význam: Podobně jako u integrálu, i zde můžeme za určitých podmínek zaměnit pořadí limity a derivace. Podmínky jsou zde ale přísnější: nestačí stejnoměrná konvergence původní posloupnosti f_n , ale musíme požadovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti derivací f'_n . Věta nám pak zaručuje, že derivace limitní funkce je to samé, co limita posloupnosti derivací.