

Mocninné řady

Materiál pro studenty učitelství matematiky

Definice 1 (Mocninná řada). *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných nebo komplexních čísel a x_0 je reálné nebo komplexní číslo. Pak řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

*se nazývá **mocninná řada** se středem v bodě x_0 a s koeficienty a_n .*

Základní otázkou při práci s mocninnými řadami je, pro které hodnoty proměnné x daná řada konverguje. Množina všech takových x se nazývá **obor konvergence**.

Ukazuje se, že obor konvergence mocninné řady má vždy symetrickou strukturu kolem svého středu. Tuto vlastnost formálně popisuje následující klíčová věta.

Věta 1 (O poloměru konvergence). *Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ existuje právě jedno číslo $R \in [0, \infty]$, nazývané **poloměr konvergence**, takové, že:*

- řada **absolutně konverguje** pro každé x , které splňuje $|x - x_0| < R$.
- řada **diverguje** pro každé x , které splňuje $|x - x_0| > R$.

V případech, kdy $|x - x_0| = R$ (tzv. krajní body intervalu konvergence), nelze o konvergenci obecně rozhodnout.

Klíčová myšlenka, na níž jsou postaveny následující důkazy, je založena na porovnávání velikosti členů řady. Intuitivně platí, že pokud mocninná řada konverguje v nějakém bodě x_1 , pak pro jakýkoliv bod x , který leží ke středu x_0 blíže než x_1 (tedy $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$), jsou členy $|a_n(x - x_0)^n|$ menší než členy $|a_n(x_1 - x_0)^n|$. Konvergence v bodě x_1 si vynucuje určitou „kontrolu“ nad velikostí koeficientů a_n , která je více než dostatečná pro zaručení (absolutní) konvergence v bližším bodě x . Naopak, pokud řada v nějakém bodě diverguje, pro všechny body, které jsou od středu ještě dál, budou členy řady v absolutní hodnotě jen narůstat, a proto tam řada také diverguje. Tímto způsobem vzniká interval konvergence.

Důkaz. Pro zjednodušení uvažujme řadu se středem v bodě $x_0 = 0$, tedy $\sum a_n x^n$. Zobecnění pro libovolné x_0 je triviální.

Definujme množinu M jako:

$$M = \{r \in [0, \infty) \mid \text{posloupnost } \{|a_n r^n|\}_{n=0}^{\infty} \text{ je omezená}\}$$

Množina M je zjevně neprázdná, protože vždy obsahuje 0. Nyní definujme poloměr konvergence R jako supremum této množiny:

$$R = \sup M$$

Musíme rozlišit dva případy. Pokud množina M není shora omezená, klademe $R = \infty$. Pokud je omezená, R je konečné nezáporné číslo. Nyní dokážeme, že takto definované R má vlastnosti uvedené ve větě.

Část důkazu 1 (Konvergence pro $|x| < R$). *Zvolme libovolné x takové, že $|x| < R$. Protože $|x|$ je menší než supremum množiny M , musí existovat nějaké číslo $r_1 \in M$ takové, že $|x| < r_1 \leq R$.*

Z definice množiny M víme, že jelikož $r_1 \in M$, posloupnost $\{|a_n r_1^n|\}$ je omezená. Existuje tedy konstanta $K > 0$ taková, že pro všechna n platí:

$$|a_n r_1^n| \leq K$$

Nyní upravme obecný člen naší řady v bodě x :

$$|a_n x^n| = |a_n r_1^n \cdot \frac{x^n}{r_1^n}| = |a_n r_1^n| \cdot \left| \frac{x}{r_1} \right|^n \leq K \cdot \left| \frac{x}{r_1} \right|^n$$

Označme $q = \left| \frac{x}{r_1} \right|$. Jelikož jsme zvolili $|x| < r_1$, platí, že $0 \leq q < 1$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} K \cdot q^n$ je geometrická řada s kvocientem $q < 1$, a je tedy konvergentní. Protože pro všechna n platí $|a_n x^n| \leq K q^n$, řada $\sum a_n x^n$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

Část důkazu 2 (Divergence pro $|x| > R$). Zvolme libovolné x takové, že $|x| > R$. Označme $|x| = r$. Jelikož $r > R = \sup M$, číslo r nemůže ležet v množině M .

Podle definice množiny M to znamená, že posloupnost $\{|a_n r^n|\} = \{|a_n x^n|\}$ **není omezená**. Pokud ale posloupnost členů řady $\{a_n x^n\}$ není omezená, nemůže platit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$. Nebyla tedy splněna nutná podmínka konvergence řady. Z toho plyne, že řada $\sum a_n x^n$ diverguje.

Tím je existence a vlastnosti poloměru konvergence R dokázána. $\square$

Kromě bodové konvergence uvnitř intervalu konvergence mají mocninné řady i silnější vlastnost – konvergují zde lokálně stejnoměrně. To má zásadní důsledky, například to, že součet mocninné řady je na intervalu konvergence spojitá funkce.

Věta 2 (O lokálně stejnoměrné konvergenci). *Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ poloměr konvergence $R > 0$. Pak tato řada konverguje **lokálně stejnoměrně** na otevřeném intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. To znamená, že pro každý uzavřený podinterval $[c, d] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ řada na tomto podintervalu konverguje stejnoměrně.*

Důkaz. Mějme řadu $\sum a_n(x - x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$. Zvolme libovolný uzavřený interval $[c, d]$, který je celý obsažen v intervalu konvergence $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Definujme číslo ρ jako maximální vzdálenost bodů z intervalu $[c, d]$ od středu x_0 :

$$\rho = \max\{|c - x_0|, |d - x_0|\}$$

Protože interval $[c, d]$ je uzavřený a leží striktně uvnitř $(x_0 - R, x_0 + R)$, musí platit $\rho < R$.

Pro libovolné $x \in [c, d]$ platí nerovnost $|x - x_0| \leq \rho$. Můžeme tedy odhadnout velikost členů naší řady:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n||x - x_0|^n \leq |a_n|\rho^n$$

Tato nerovnost platí pro **všechna** $x \in [c, d]$.

Nyní uvažujme číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho^n$. Jelikož $\rho < R$, z věty o poloměru konvergence víme, že mocninná řada $\sum a_n(x - x_0)^n$ v bodě $x = x_0 + \rho$ absolutně konverguje. To znamená, že číselná řada $\sum |a_n|((x_0 + \rho) - x_0)^n = \sum |a_n|\rho^n$ je konvergentní. Označme $M_n = |a_n|\rho^n$. Naši jsme tedy konvergentní číselnou řadu $\sum M_n$, která je majorantou k naší funkční řadě na intervalu $[c, d]$.

Připomeňme, že řada funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k součtu $s(x)$ na intervalu I , právě když posloupnost jejích částečných součtů $s_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k $s(x)$. To je ekvivalentní podmínce, že posloupnost zbytků po k -tém členu, definovaná jako rozdíl součtu a částečného součtu $R_k(x) = s(x) - s_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$, konverguje stejnoměrně k nule. Podmínka pro stejnoměrnou konvergenci je tedy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in I} |R_k(x)| \right) = 0$$

V našem případě je $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$. Pro zbytek $R_k(x)$ na intervalu $[c, d]$ můžeme provést následující odhad:

$$\sup_{x \in [c, d]} |R_k(x)| = \sup_{x \in [c, d]} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right| \leq \sup_{x \in [c, d]} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$$

První nerovnost v tomto odhadu je důsledkem trojúhelníkové nerovnosti. Pro každý konečný součet platí $\left| \sum_{n=k+1}^N f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^N |f_n(x)|$. Limitním přechodem $N \rightarrow \infty$ se tato nerovnost přenesla i na nekonečné řady. Vlastnost suprema pak tuto nerovnost zachovává i po jeho aplikaci na obě strany.

V odhadu dále pokračujeme:

$$\sup_{x \in [c, d]} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|\rho^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n$$

Protože číselná řada $\sum M_n$ konverguje, její zbytek $\sum_{n=k+1}^{\infty} M_n$ musí jít k nule pro $k \rightarrow \infty$. Jelikož $\sup |R_k(x)|$ je nezáporné a shora omezené posloupností jdoucích k nule, musí jít také k nule. Tím je supremová podmínka splněna.

Tento postup, kdy nalezneme konvergentní číselnou majorantu a z ní odvodíme splnění supremové podmínky, je známý jako **Weierstrassův M-test**. Dokázali jsme tedy, že řada konverguje na intervalu $[c, d]$ stejnoměrně.

Jelikož jsme tento postup mohli provést pro libovolný uzavřený podinterval $[c, d]$ intervalu konvergence, dokázali jsme, že konvergence je na $(x_0 - R, x_0 + R)$ lokálně stejnoměrná. $\square$

Jednou z nejdůležitějších vlastností mocninných řad je možnost derivovat je a integrovat „člen po členu“, podobně jako polynomy. Stejnoměrná konvergence zaručuje, že tyto operace jsou korektní a že výsledná řada má stejný poloměr konvergence.

Věta 3 (Derivace mocninné řady člen po členu). *Nechť mocninná řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom součet této řady je funkce, která má na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivace všech řádů. Její první derivaci $f'(x)$ získáme derivováním řady člen po členu:*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

Tato nová mocninná řada má stejný poloměr konvergence R .

Příklad: Výpočet součtu řady

Určete součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Řešení: Všimneme si, že koeficienty $a_n = n$ jsou podobné těm, které vznikají při derivování. Vyjdeme proto ze známé geometrické řady, jejíž součet umíme vyjádřit v explicitním tvaru.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Tento vztah platí pro $|x| < 1$, tedy poloměr konvergence této řady je $R = 1$.

Podle věty o derivaci řady člen po členu můžeme obě strany rovnice zderivovat. Derivace součtu se rovná součtu derivací.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Současně zderivujeme řadu člen po členu:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Dostali jsme tak rovnost:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{pro } |x| < 1$$

Naším cílem je však najít součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Tuto řadu získáme z předchozího výsledku vynásobením celé rovnice proměnnou x :

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Provedeme-li totéž na pravé straně rovnice, dostaneme hledaný součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Tento vztah platí na původním intervalu konvergence, tedy pro $x \in (-1, 1)$.

Poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ lze určit pomocí koeficientů a_n pomocí vzorce odvozeném v následující větě.

Věta 4 (Výpočet poloměru konvergence). *Pokud existuje limita*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

pak poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je dán vztahem:

$$R = \frac{1}{L}$$

přičemž pro $L = 0$ klademe $R = \infty$ a pro $L = \infty$ klademe $R = 0$.

Odvození vzorce vychází z podílového (d'Alembertova) kritéria pro konvergenci číselných řad. Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Aplikací podílového kritéria na tuto řadu zkoumáme limitu:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right|$$

Tuto limitu můžeme upravit:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x - x_0|$$

Označme $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Potom $L(x) = L \cdot |x - x_0|$.

Podle podílového kritéria řada konverguje, pokud je $L(x) < 1$, a diverguje, pokud je $L(x) > 1$. V prvním případě dostáváme:

$$L \cdot |x - x_0| < 1 \implies |x - x_0| < \frac{1}{L}$$

Z tohoto vztahu vidíme, že řada konverguje pro všechna x v otevřeném intervalu (kruhu) se středem x_0 a poloměrem $R = \frac{1}{L}$. Naopak, pokud je $L(x) > 1$, řada diverguje, což odpovídá bodům, pro které platí $|x - x_0| > \frac{1}{L}$.

Tím jsme odvodili vzorec pro poloměr konvergence R za předpokladu, že limita L existuje.