

Taylorovy řady

úlohy z an3, 2025/26

1. Vypočtete Taylorovu řadu T_c funkce kosinus se středem v bodě nula a Taylorovu řadu T_s funkce sinus se středem v bodě nula.
2. Ukažte, že obě Taylorovy řady T_c , T_s mají poloměr konvergence roven nekonečnu.
3. Ukažte, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T'_s(x) = T_c(x), \quad T'_c(x) = -T_s(x)$$

4. Uvažujme funkci $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

- (i) Ukažte, že existuje funkce g definovaná a spojitá na množině $\mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : g(x) = f(x)$$

Určete $g(0)$.

- * (ii) Ukažte, že

$$g'(0) = 0$$

Návod: použijte L'Hospitalovo pravidlo na limitu $(1/x)/\exp(1/x^2)$.

- ** (iii) Ukažte, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$g^{(k)}(0) = 0$$

Za vyřešení této úlohy a předvedení na cvičení dostanete půl bodu do zkouškové písemky (alternativa k eseji).

- (iv) Sestrojte na základě výsledku (iii) Taylorovu řadu T_g funkce g v bodě nula.
- (v) Ukažte, že pro $x \neq 0$ platí

$$T_g(x) \neq g(x)$$