

Dvojné integrály

úlohy pro an3, 2025/26

1. Nechť $R, \Delta R, \Delta\Phi \in [0, \infty)$, $\Phi \in \mathbb{R}$, $\Delta R/2 < R$. Načrtněte obrazec O (výseč mezikruží) a vypočtěte jeho obsah

$$O = \{[r \cos \varphi, r \sin \varphi] : r \in [R - \Delta R/2, R + \Delta R/2], \varphi \in [\Phi, \Phi + \Delta\Phi]\}$$

2. Nechť $R > 0$. Načrtněte čtverec

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, |y| \leq R\}.$$

Kruh čtverci vepsaný označte V a kruh čtverci opsaný označte O .

Vypočtěte integrály funkce $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ přes množiny V , O .

Vypočtené integrály použijte k odhadu integrálu

$$\int_{-R}^R \exp(-x^2) \, dx$$

a k výpočtu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, dx.$$