

Úlohy na metrické prostory

úlohy z an3, 2025/26

- 1a Ukažte, že zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje axiomy normy

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

- 1b

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- 1c

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

- 2a Zjistěte, zda zobrazení ϱ splňuje na množině $\mathbb{R}$ axiomy metrického prostoru.

$$\varrho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

- 2b

$$\varrho(x, y) = (x - y)^2$$

- 2c

$$\varrho(x, y) = \sqrt[3]{x - y}$$

- 2d

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

- 2e

$$\varrho(x, y) = |x - y|$$

3. Na přednášce jsme ukázali, že množina A v metrickém prostoru je otevřená právě když je její doplněk uzavřená množina. Ukažte, že odtud plyne tvrzení:

Množina A v metrickém prostoru je uzavřená právě když je její doplněk otevřená množina.

- 4a Vypočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ v metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou.

$$a_n = \left(\frac{2n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 1}}{n + 2}, (1 + 1/n)^n \right)$$

4b

$$a_n = \left(n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 1}, \frac{(2n^3 + 1)^2}{(3n^2 + 1)^3} \right)$$

5. Následující dvě úlohy ukazují charakterizaci hromadných bodů množiny $A \subseteq M$ v metrickém prostoru (M, d) .
- 5a Nechť $x \in A$. Ukažte, že bod x je hromadným bodem množiny A právě když není izolovaným bodem množiny A .
- 5b Nechť $x \notin A$. Ukažte, že bod x je hromadným bodem množiny A právě když je hraničním bodem množiny A .