Analýza posloupností funkcí

Pro každou z níže uvedených posloupností funkcí (f_n) proveďte následující analýzu. Cílem je pochopit, jak se funkce v posloupnosti chovají, když se n blíží k nekonečnu.

Část 1: Analýza a grafické znázornění (pro úlohy a–l)

U každé zadané posloupnosti funkcí f_n postupujte v těchto krocích:

1. **Vizuální průzkum**
   Napište předpis prvních několika členů posloupnosti – doporučuji zvolit například $n = 1, 2, 5$. Poté do jedné soustavy souřadnic načrtněte grafy těchto funkcí (tj. například grafy funkcí f_1, f_2, f_5).

2. **Výpočet bodové limity**
   Zamyslete se, co se děje s funkční hodnotou $f_n(x)$ pro **pevně zvolené** x, když $n \to \infty$.

   - Určete **obor konvergence** (D), tedy množinu všech x, pro která existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   - Pro každé $x \in D$ tuto limitu vypočtěte a zapište předpis **limitní funkce** f.

   Nápověda: U mnoha zadaných posloupností funkcí je posloupnost hodnot $(f_n(x))$ pro pevné x monotónní (nerostoucí nebo neklesající). Připomeňte si větu o limitě monotónní posloupnosti: je-li taková posloupnost omezená, pak je konvergentní a její limita je rovna jejímu supremu (pro neklesající posloupnost) nebo infimu (pro nerostoucí posloupnost).

3. **Graf limitní funkce**
   Do stejného obrázku načrtněte graf výsledné limitní funkce f.

4. **Praktická ukázka definice limity**
   a) Vyberte si na ose x jeden bod a z oboru konvergence D a na ose y vyznačte $f(a)$.
   b) Na ose y vyznačte malé ε-okolí bodu $f(a)$.
   c) Najděte (odhadem nebo početně) takové n_0, aby hodnota $f_{n_0}(a)$ již ležela ve zvoleném okolí. Pokud graf pro toto n_0 ještě nemáte, dokreslete ho.

Část 2: Zadání konkrétních funkcí

Výše uvedené čtyři kroky aplikujte na následující posloupnosti funkcí:

a) $f_n(x) = x^n$

b) $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$

c) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$

d) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n)$

e) $f_n(x) = \exp(nx)$

f) $f_n(x) = \exp(-nx^2)$

g) $f_n(x) = |1 - nx|$

h) $f_n(x) = 1 - |1 - nx|$

i) $f_n(x) = \max\{1 - |1 - nx|, 0\}$

j) $f_n(x) = \min\{|1 - nx|, 1\}$

k) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

l) $f_n(x) = \sin^n(x)$

Část 3: Analýza spojitosti limitní funkce

Pro každou limitní funkci f z Části 2 určete množinu bodů z oboru konvergence D, ve kterých tato funkce **není** spojitá. Svůj závěr stručně zdůvodněte.

Část 4: Záměna limit a derivací

4.1 Záměna pořadí limit

Vypočtěte a porovnejte následující dvojice limit.

Poznámka: Všimněte si, že limitní funkce f z úloh 2a a 2f, které zde zkoumáte, nebyly spojité ve všech bodech (viz Část 4). Souvisí výsledek této úlohy se spojitostí?

a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1^-} x^n \right) \quad \text{vs.} \quad \lim_{x\to 1^-} \left(\lim_{n\to\infty} x^n \right)$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 0} e^{-nx^2} \right) \quad \text{vs.} \quad \lim_{x\to 0} \left(\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} \right)$$

4.2 Záměna limity a derivace

Uvažujte posloupnost funkcí $f_n(x) = x \cdot e^{-nx^2}$.

1. Najděte bodovou limitu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a vypočtěte derivaci f'.
2. Vypočtěte derivaci $f_n'(x)$ pro obecné n a najděte bodovou limitu $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.
3. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)'$$

Hodně zdaru při řešení!