Vzorové řešení: Analýza posloupností funkcí

Úloha 2a: $f_n(x) = x^n$

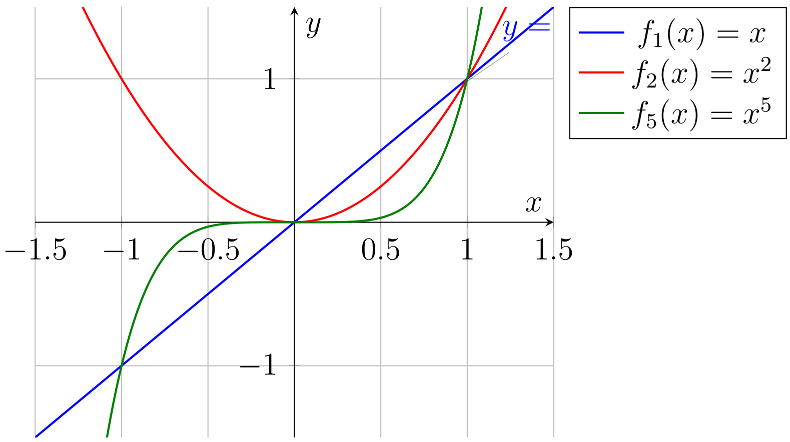
Cílem je prozkoumat chování posloupnosti funkcí $f_n(x) = x^n$ pro $n \to \infty$.

1 Vizuální průzkum

Nejprve si napíšeme a načrtneme několik prvních členů posloupnosti, například pro $\boldsymbol{n = 1, 2, 5}$.

- **n = 1:** $f_1(x) = x$ (lineární funkce, přímka)
- **n = 2:** $f_2(x) = x^2$ (kvadratická funkce, parabola)
- **n = 5:** $f_5(x) = x^5$ (mocninná funkce)

Grafické znázornění:
Na grafu vidíme, že pro $x \in (-1, 1)$ se hodnoty $f_n(x)$ s rostoucím n přibližují k nule. V bodě $x = 1$ jsou všechny funkční hodnoty rovny 1.



2 Výpočet bodové limity

Nyní určíme limitu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pro každé pevně zvolené x. Musíme rozlišit několik případů:

- **Pro $|x| < 1$ (tedy $x \in (-1, 1)$):**
  Limita mocniny, kde základ je v absolutní hodnotě menší než 1, je nula.
  $$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$
- **Pro $x = 1$:**
  Posloupnost funkčních hodnot je konstantní: $(1, 1, 1, \dots)$.
  $$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

- **Pro $x = -1$:**
  Získáme posloupnost $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, která osciluje a nemá limitu. Bod tedy nepatří do oboru konvergence.

- **Pro $|x| > 1$ (tedy $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$):**
  Limita je nevlastní (posloupnost diverguje k $\pm\infty$). Tyto body tedy nepatří do oboru konvergence.

Závěr:

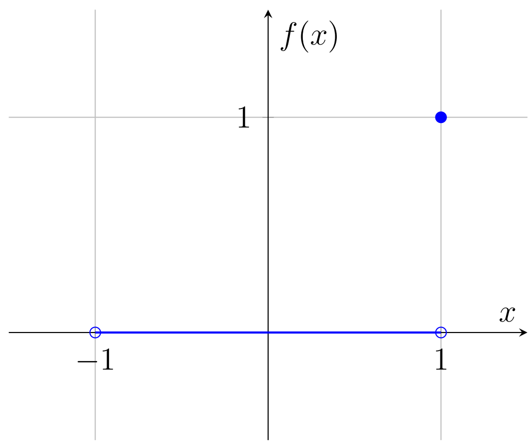
- **Obor konvergence (D):** Posloupnost konverguje pro $\boldsymbol{x \in (-1, 1]}$.

- **Limitní funkce (f):** Předpis limitní funkce je:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

3 Graf limitní funkce

Grafem je úsečka na ose x v intervalu $(-1, 1)$ (bez krajních bodů) a samostatný bod v souřadnicích $[1, 1]$.



Důležitý postřeh: Ačkoliv jsou všechny funkce $f_n(x) = x^n$ spojité na celém svém definičním oboru, jejich bodová limita, funkce $f(x)$, **není spojitá** na svém oboru konvergence. Má bod nespojitosti v $x = 1$.

4 Praktická ukázka definice limity

Zvolme si bod z oboru konvergence, například $\boldsymbol{a = 0.5}$.

1. Limitní hodnota v tomto bodě je $\boldsymbol{f(0.5) = 0}$.

2. Zvolme malé okolí této limity, například $\boldsymbol{\varepsilon = 0.1}$. Hledáme tedy hodnoty na ose y v intervalu $(-0.1, 0.1)$.

3. Chceme najít takové n_0, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo, že $f_n(0.5)$ leží v tomto okolí. Řešíme tedy nerovnost:

$$\begin{aligned} |f_n(0.5) - f(0.5)| &< 0.1 \\ |0.5^n - 0| &< 0.1 \\ 0.5^n &< 0.1 \end{aligned}$$

Nerovnost zlogaritmujeme:

$$\begin{aligned} n \cdot \ln(0.5) &< \ln(0.1) \\ n &> \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.5)} \approx 3.32 \end{aligned}$$

Musíme tedy zvolit $\boldsymbol{n_0 = 4}$. Pro funkci $f_4(x) = x^4$ a všechny další členy posloupnosti již bude platit, že jejich funkční hodnota v bodě 0.5 je od limitní nuly vzdálena o méně než $\varepsilon = 0.1$.
Ověření: $f_4(0.5) = 0.5^4 = 0.0625$, a $0.0625 < 0.1$.

Na obrázku je ke grafům funkcí dokresleno ε-okolí bodu $f(a)$ a z obrázku je vidět, že $f_5(a)$ v tomto okolí leží.