

Písemná část zkoušky z PAN3/KAN3

7. ledna 2026

1. Vypočtete bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad I = (-1, 1)$$

- 1* Popište všechny intervaly $I \subseteq \mathbb{R}$, na kterých posloupnost f_n (z předchozí varianty) konverguje stejnoměrně.

2. Sečtete řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{3^n}$$

2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

3. Uveďte příklad množiny M a bodů a, b v metrickém prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ (množina reálných čísel s euklidovskou metrikou) splňujících uvedenou vlastnost.

Připojte důkaz, že uvedený bod má požadovanou vlastnost. Pokud takový bod neexistuje, dokažte to.

$$a \notin M, \quad b \in M,$$

a i b jsou hromadné body množiny M .

- 3* Plyne z uvedených vlastností některý z výroků $a \in \partial M$, $b \in \partial M$?

Svá tvrzení dokažte.

(Symbol ∂M značí hranici množiny M .)

4. Nalezněte jakou nejmenší a největší hodnotu nabývá funkce f na trojúhelníku T .

$$f(x, y) = x^2 - 3x + y^2 - 2y, \quad T = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$$

- 4* Vyřešte úlohu elementárně¹ bez použití derivace.

¹Návod: jaký má funkce f geometrický význam?

5. Pro zadaný obrazec O a funkci f vypočtěte objem tělesa T .

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in O, z \in [0, f(x, y)]\}.$$

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, x \geq 0\},$$

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

5* Navíc určete maximum a minimum funkce f na množině O .

Tyto hodnoty pak použijte k výpočtu dolního a horního odhadu objemu tělesa T .

5** Těleso T nahraďte vhodným kuželem. Jaký odhad pro objem tělesa T takto získáte?