

Písemná část zkoušky z PAN3/KAN3

10. ledna 2026

1. Vypočtete bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(n(x-1)), \quad I = (0, 3)$$

- 1* Popište všechny intervaly $I \subseteq \mathbb{R}$, na kterých posloupnost f_n (z předchozí varianty) konverguje stejnoměrně.

2. Sečtete řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$$

3. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) a ukažte, že

Pro $a, b, c \in M$ je $A := M \setminus \{a, b, c\}$ otevřená.

- 3* Ukažte, že libovolná množina A o konečném počtu členů je uzavřená.

4. Nalezněte jakou nejmenší a největší hodnotu nabývá funkce f na trojúhelníku T .

$$f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 3y, \quad T = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, y \leq x+5\}$$

- 4* Vyřešte úlohu elementárně¹ bez použití derivace.

5. Pro zadaný obrazec O a funkci f vypočtete objem tělesa T .

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in O, z \in [0, f(x, y)]\}.$$

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, x \geq 0\},$$

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

- 5* Navíc určete maximum a minimum funkce f na množině O .

Tyto hodnoty pak použijte k výpočtu dolního a horního odhadu objemu tělesa T .

- 5** Těleso T nahraďte vhodným kuzelem, případně jiným podobným tělesem. Jaký odhad pro objem tělesa T takto získáte?

¹Návod: jaký má funkce f geometrický význam?