

Písemná část zkoušky z PAN3/KAN3

14. ledna 2026

1. Vypočtete bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)}, \quad I = (-1, 2)$$

- 1* Navíc vypočtete limity

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0+} f_n(x) \right)$$

2. Sečtete řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$$

- 2*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$$

3. Nechť (M, ϱ) je metrický prostor, $a, b, c \in M$.

Ukažte, že množina $A := \{a, b, c\}$ je uzavřená.

- 3* Ukažte, že libovolná množina A o konečném počtu členů je uzavřená.

4. Válcový zásobník na vodu má daný objem V a je zateplen izolační vrstvou: plášť je izolován levnějším materiálem, obě podstavy dražším materiálem, který je dvakrát dražší než materiál na plášť. Určete takový poměr rozměrů zásobníku (výšky a poloměru podstavy), aby byly celkové náklady na izolační materiál minimální. Výsledek schematicky znázorněte náčrtkem válcového zásobníku v odpovídajících proporcích.

- 4* Vyřešte úlohu pro zásobník ve tvaru čtyřbokého hranolu s podstavou ve tvaru čtverce. Boční stěny jsou izolovány dvakrát levnějším materiálem než podstavy. Vypočtete poměr velikosti hrany podstavy a výšky zásobníku pro minimální cenu materiálu na zateplení.

5. Pro zadaný obrazec O a funkci f vypočtěte objem tělesa T .

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in O, z \in [0, f(x, y)]\}.$$

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\},$$

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

5* Navíc určete maximum a minimum funkce f na množině O .

Tyto hodnoty pak použijte k výpočtu dolního a horního odhadu objemu tělesa T .

5** Těleso T nahraďte vhodným kuželem, případně jiným podobným tělesem. Jaký odhad pro objem tělesa T takto získáte?