

Písemná část zkoušky z PAN3/KAN3

21. ledna 2026

1. Vypočtete bodovou limitu posloupnosti funkcí na intervalu I a zjistěte, zda posloupnost konverguje na I stejnoměrně.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \quad I = (-1, 1)$$

- 1* Určete všechny intervaly, na nichž konverguje posloupnost f_n z předchozí úlohy stejnoměrně.

2. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{k4^k}$$

- 2* Stejně zadání pro řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{\sqrt{k}4^k}$$

3. Napište definici otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ϱ) a ukažte, že pro $s \in M$, $r > 0$ je okolí $B(s, r)$ otevřená množina.

- 3* Ukažte, že pro $s_1, s_2 \in M$, $r > 0$ je množina $B(s_1, r) \cup B(s_2, r)$ otevřená množina.

4. Pro funkce f, g a bod A

(a) Vypočtete gradienty $\nabla f(A)$, $\nabla g(A)$.

(b) Do jedné soustavy souřadné načrtněte vrtevnice funkcí f, g , které procházejí bodem A . Do bodu A umístěte vektory $\nabla f(A)$, $\nabla g(A)$.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y, \quad g(x, y) = x + y^2, \quad A[1, 2]$$

- 4* Navíc napište rovnice tečen k oběma vrtevnicím v bodě A .

5. Pro zadaný obrazec O a funkci f vypočtete objem tělesa

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in O, z \in [0, f(x, y)]\}.$$

Dále určete maximum a minimum funkce f na množině O .

Tyto hodnoty pak použijte k výpočtu dolního a horního odhadu objemu tělesa T .

$$O = [0, 2] \times [0, 3], \quad f(x, y) = \exp(x - y)$$

- 5* Řešte úlohu pro stejný obrazec a pro funkci $f(x, y) = (\exp(x - y))^2$