Úlohy na cvičení dne 10. listopadu 2026 z PAN3

1. Napište, co znamená, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a ukažte, že funkce $f(x, y) = y$ je v každém bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ spojitá.

2. Uvažujme metrické prostory (X_1, d_1), (X_2, d_2), zobrazení $f : X_1 \to X_2$, bod $\mathbf{x} \in X_1$ a množinu $M \subseteq X_1$. Ukažte, že z platnosti výroku (i) plyne platnost (ii). Dále ukažte, že opačná implikace v obecném případě neplatí.

   (i) Zobrazení f je spojité v bodě $\mathbf{x}$.

   (ii) Zobrazení f je spojité v bodě $\mathbf{x}$ vzhledem k množině M.

3. Napište co znamená, že funkce f nabývá na množině A maximální hodnoty. Ukažte, že pro množiny A, B, $A \subset B$ platí:

   (a) Pokud f nabývá v bodě $\mathbf{x} \in A$ maxima na množině B, pak f nabývá maxima v bodě $\mathbf{x}$ i na množině A.

   (b) Zformulujte obměněnou implikaci k (a). Vysvětlete, jak tuto obměněnou implikaci použijete při hledání extrémů funkcí více proměnných.

   (c) Ukažte, že platí: $\max_{\mathbf{x}\in A} f(x) \leq \max_{\mathbf{x}\in B} f(x)$.

4. Uvažujme funkci f, množinu A a bod $\mathbf{x} \in A$.

   (a) Napište, co znamená, že funkce f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ maxima na množině A.

   (b) Napište, co znamená, že funkce f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ lokálního maxima vzhledem k množině A.

   (c) Ukažte, že platí: Pokud f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ maxima na množině A, pak nabývá v bodě $\mathbf{x}$ lokálního maxima vzhledem k množině A.

   (d) Zformulujte obměněnou implikaci k (c).

5. Uvažujme trojúhelník T v rovině. Detektiv Weierstrass shromáždil dostatek důkazů k tvrzení, že každá funkce f spojitá na trojúhelníku T na něm nabývá své nejmenší a největší hodnoty. Nalezněte tyto hodnoty v následujících krocích:

   (a) Zdůvodněte, že funkce f je spojitá na trojúhelníku T.

   (b) Zjistěte, které body trojúhelníku mají dokonalé alibi, že jejich funkční hodnota není ani maximem ani minimem funkce f na trojúhelníku T.

   (c) Shromážděte body, které toto alibi nemají a konfrontujte je s důkazy, že mezi nimi jsou držitelé minima i maxima funkce f na trojúhelníku T. Vyzvěte je, ať sdělí své funkční hodnoty a určete „viníky“.

   (d) Shrňte zjištěné skutečnosti: jakých extrémů funkce f na trojúhelníku T nabývá a ve kterých bodech.

   Úlohu řešte pro

$$T = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}, \qquad f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x - y$$