

Metrické prostory

Učební text pro studenty učitelství matematiky

Metodický materiál

21. října 2026

Obsah

1	Úvod do metrických prostorů	2
1.1	Motivace: Od geometrické intuice k potřebě abstrakce	2
1.2	Definice a základní příklady	3
1.3	Didaktický rozbor základních pojmů	5
2	Topologické pojmy v metrickém prostoru	5
2.1	Základní definice	5
2.2	Věty o struktuře množin a jejich důkazy	6
2.3	Množinové operace s otevřenými a uzavřenými množinami	7
3	Aplikace a ilustrativní příklady v konkrétních prostorech	8
3.1	Topologická analýza v $(\mathbb{R}, x - y)$	8
3.2	Topologická analýza v diskrétním metrickém prostoru	8
4	Posloupnosti a úplnost	9
4.1	Konvergentní posloupnosti a uzavřené množiny	9
4.2	Cauchyovské posloupnosti a úplné metrické prostory	9
5	Didaktické shrnutí, miskoncepce a cvičení	10
5.1	Přehled typických studentských miskonceptů	10
5.2	Vzorové řešené úlohy	10

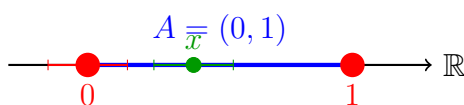
1 Úvod do metrických prostorů

1.1 Motivace: Od geometrické intuice k potřebě abstrakce

V elementární geometrii a počátečních kurzech matematické analýzy pracujeme intuitivně se vzdáleností bodů v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$. Vzdálenost dvou bodů $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ v rovině určujeme pomocí Pythagorovy věty jako $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

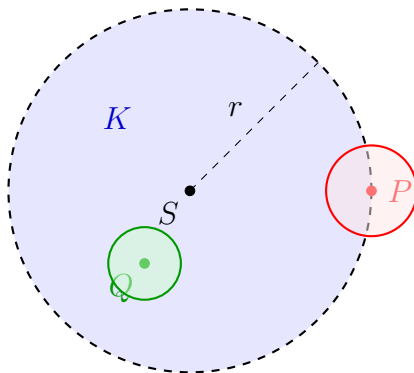
Než přistoupíme k formální definici metriky, zamysleme se nad zdánlivě jednoduchou otázkou: *Co tvoří hranici geometrického útvaru či množiny?* Zamysleme se nad třemi následujícími situacemi a pokusme se zformulovat naši přirozenou intuici.

Příklad 1.1 (Otevřený interval na reálné ose). Uvažujme otevřený interval $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.



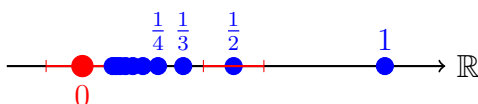
Intuitivně cítíme, že hranicí intervalu $(0, 1)$ jsou body 0 a 1. Proč právě tyto dva body? Pokud zvolíme libovolný bod uvnitř intervalu, např. $x = 0,4$, můžeme kolem něj vytvořit malý úsek (okolí), který leží zcela uvnitř množiny A . Naopak kolem bodu 0 (který sám do A nepatří) platí, že jakkoliv malý úsek kolem něj nakreslíme (např. interval $(-0,15; 0,15)$), tento úsek bude *vždy* obsahovat jak body ležící uvnitř A (např. $0,05$), tak body ležící vně A (např. $-0,1$). Proto je bod 0 (a ze stejného důvodu i bod 1) hraničním bodem.

Příklad 1.2 (Kruh v rovině). Uvažujme otevřený kruh $K = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(S, X) < r\}$ se středem S a poloměrem $r > 0$ v eukleidovské rovině.



Hranicí kruhu K je příslušná hraniční kružnice $S(S, r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(S, X) = r\}$. Vnitřní bod Q má kolem sebe malé kruhové okolí ležící celé uvnitř K . Zvolíme-li bod P přímo na hraniční kružnici, pak jakékoliv (i to nejmenší) kruhové okolí se středem v P obsahuje jak body z vnitřku kruhu K , tak body ležící mimo kruh K .

Příklad 1.3 (Množina převrácených hodnot). Uvažujme množinu $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subset \mathbb{R}$.



Tento příklad prověří naši intuici hlouběji:

- Je bod $\frac{1}{2}$ hraničním bodem množiny A ? Ano. Libovolné malé okolí kolem bodu $\frac{1}{2}$ obsahuje samotný bod $\frac{1}{2} \in A$, ale současně obsahuje i nekonečně mnoho čísel mimo A . Tedy **každý** prvek $\frac{1}{n} \in A$ je hraničním bodem.
- Co však bod 0? Bod 0 sám do množiny A nepatří ($0 \neq \frac{1}{n}$). Pokud však kolem bodu 0 vezmeme jakékoliv okolí $(-\varepsilon, \varepsilon)$, toto okolí bude **vždy** obsahovat bod $0 \notin A$ a zároveň **nekonečně mnoho** prvků množiny A (všechna $\frac{1}{n}$ pro $n > \frac{1}{\varepsilon}$).

Bod 0 tedy rovněž splňuje intuitivní podmínku hraničního bodu. Hranicí množiny A je proto celá množina $\partial A = A \cup \{0\}$.

Poznámka 1.4 (Závěr: Od intuice k matematickému aparátu). Ze všech tří příkladů vyplývá společné pravidlo:

Intuitivní charakterizace hranice: Bod x tvoří hranici množiny A , pokud v jeho libovolně malém „okolí“ leží jak prvky patřící do množiny A , tak prvky ležící mimo množinu A .

Abychom tuto intuici dokázali převést do přesné matematické řeči, musíme umět korektně definovat výraz **„libovolně malé okolí bodu x “**.

To vyžaduje schopnost **měřit vzdálenost** mezi prvky daného prostoru. Okolí bodu x o poloměru $r > 0$ totiž reprezentuje množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu x je menší než r .

V eukleidovském prostoru měříme vzdálenost běžnou eukleidovskou metrikou. Chceme-li však zkoumat strukturu množin v obecnějších prostorech (např. v prostorech funkcí či posloupností), musíme koncept vzdálenosti abstrahovat. To nás vede k zavedení obecného pojmu **metrického prostoru** a z něj odvozeného pojmu **okolí (otevřená koule)**.

1.2 Definice a základní příklady

Definice 1.5 (Metrický prostor). Nechť X je neprázdná množina a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení. Dvojici (X, d) nazýváme *metrickým prostorem* a zobrazení d *metrikou* na X , pokud pro libovolné prvky $x, y, z \in X$ platí následující čtyři axiomy:

- (M1) $d(x, y) \geq 0$ (Nezápornost),
- (M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Separabilita / Identita neodlišitelných),
- (M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symetrie),
- (M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Trojúhelníková nerovnost).

Příklad 1.6 (Metrika indukovaná normou). Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný vektorový prostor. Pak zobrazení $d(x, y) = \|x - y\|$ definuje metriku na V .

Důkaz. Ověříme axiomy metriky krok za krokem z axiomů normy:

- (M1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, neboť norma je vždy nezáporná.
- (M2) $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
- (M3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

$$(M4) \quad d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Všechny axiomy platí, d je tedy metrika. $\square$

Příklad 1.7 (Diskrétní metrický prostor). Nechť X je libovolná neprázdná množina. Definujeme zobrazení $d_D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem:

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y, \\ 1 & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

Ukažte, že d_D je metrika (tzv. *diskrétní metrika*).

Důkaz. (M1) Hodnoty $d_D(x, y)$ jsou 0 nebo 1, tedy $d_D(x, y) \geq 0$.

(M2) Z definice předpisu přímo plyne $d_D(x, y) = 0 \iff x = y$.

(M3) Je-li $x = y$, pak $d_D(x, y) = 0 = d_D(y, x)$. Je-li $x \neq y$, pak $y \neq x$ a $d_D(x, y) = 1 = d_D(y, x)$.

(M4) Trojúhelníková nerovnost $d_D(x, z) \leq d_D(x, y) + d_D(y, z)$:

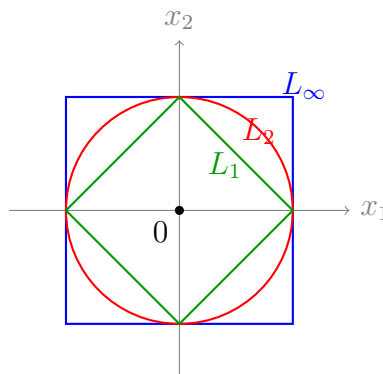
- Je-li $x = z$, pak levá strana $d_D(x, z) = 0 \leq d_D(x, y) + d_D(y, z)$ platí triviálně.
- Je-li $x \neq z$, pak levá strana je 1. Pokud by pravá strana byla 0, muselo by platit $d_D(x, y) = 0$ a $d_D(y, z) = 0$, což znamená $x = y$ a $y = z$, odkud $x = z$, což je spor s předpokladem $x \neq z$. Pravá strana je tedy alespoň 1. Nerovnost $1 \leq d_D(x, y) + d_D(y, z)$ vždy platí.

$\square$

Příklad 1.8 (Geometrické porovnání metrik v $\mathbb{R}^2$). Pro body $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ uvažujme tři metriky:

- Eukleidovská metrika L_2 : $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$,
- Manhattanská (poštácká) metrika L_1 : $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,
- Maximová metrika L_∞ : $d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$.

Vizualizujeme jednotkovou kouli se středem v počátku $S = (0, 0)$ a poloměrem $r = 1$, definovanou jako $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, x) < 1\}$ resp. její hranici $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, x) = 1\}$.



Příklad 1.9 (Geometrické porovnání metrik v $\mathbb{R}^3$). V prostoru $\mathbb{R}^3$ má sféra $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(0, x) = 1\}$ tyto tvary:

- V metrice L_2 tvoří klasickou kulovou plochu.
- V metrice L_1 tvoří pravidelný osmistěn (dvojjehlan) definovaný rovnicí $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$.
- V metrice L_∞ tvoří krychli o hraně délky 2 definovanou rovnicí $\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = 1$.

1.3 Didaktický rozbor základních pojmů

Didaktická poznámka 1.10 (Jak žákům vysvětlit trojúhelníkovou nerovnost). Trojúhelníková nerovnost $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ vyjadřuje přirozenou zkušenost: „Cesta přímo z bodu x do bodu z není nikdy delší než cesta přes oklikový bod y .“

Didaktická poznámka 1.11 (Rozbití fixace na eukleidovskou geometrii). Pro žáky i studenty bývá slovo „koule“ mentálně svázáno výhradně s kulatým tvarem z eukleidovské geometrie. Použití manhattanské či maximové metriky umožňuje ukázat, že geometrický tvar koule závisí na způsobu měření vzdálenosti.

2 Topologické pojmy v metrickém prostoru

2.1 Základní definice

Definice 2.1 (Okolí bodu / Otevřená koule). Nechť (X, d) je metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. *Otevřenou koulí* (neboli r -okolím bodu x) rozumíme množinu:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}. \quad (1)$$

Definice 2.2 (Vztah bodu a množiny). Nechť (X, d) je metrický prostor a $A \subseteq X$. Bod $x \in X$ nazveme:

- *Vnitřním bodem množiny A* , pokud existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A$.
- *Hraničním bodem množiny A* , pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ a zároveň $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
- *Vnější bodem množiny A* , pokud existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ (tj. bod x je vnitřním bodem doplňku $X \setminus A$).

Množinu všech vnitřních bodů značíme $\text{int } A$, množinu všech hraničních bodů ∂A a množinu všech vnějších bodů $\text{ext } A$.

Definice 2.3 (Uzávěr množiny). Nechť (X, d) je metrický prostor a $A \subseteq X$. *Uzávěrem množiny A* v metrickém prostoru (X, d) rozumíme množinu $\bar{A}$ definovanou jako sjednocení množiny A a všech jejích hraničních bodů:

$$\bar{A} = A \cup \partial A. \quad (2)$$

Poznámka 2.4 (Propojení s úvodní intuicí). Porovnejte formální zápis podmínky pro hraniční bod $(B(x, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset)$ s intuitivními úvahami z Příkladů 1.1, 1.2 a 1.3. Formální definice je přesným vyjádřením faktu, že v libovolném okolí bodu x leží jak prvky z A , tak prvky mimo A .

Definice 2.5 (Otevřená a uzavřená množina). Nechť (X, d) je metrický prostor a $A \subseteq X$. Řekneme, že množina A je:

- *Otevřená* v (X, d) , pokud $A = \text{int } A$ (neboli každý bod množiny A je jejím vnitřním bodem).
- *Uzavřená* v (X, d) , pokud je její doplněk $X \setminus A$ otevřenou množinou v (X, d) .

2.2 Věty o struktuře množin a jejich důkazy

Věta 2.6 (Partice prostoru). Nechť (X, d) je metrický prostor a $A \subseteq X$. Množiny $\text{int } A$, ∂A a $\text{ext } A$ tvoří disjunktní rozklad prostoru X , tj.:

$$X = \text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A, \quad (3)$$

přičemž tyto tři množiny jsou po dvou disjunktní.

Důkaz. Volme libovolný bod $x \in X$. Zvažme vlastnost okolí $B(x, r)$:

1. Nechť existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A$. Pak podle definice $x \in \text{int } A$.
2. Nechť existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq X \setminus A$. Pak podle definice $x \in \text{ext } A$.
3. Pokud nenastane případ 1 ani případ 2, pak pro každé $r > 0$ koule $B(x, r)$ není celá v A (tedy protíná $X \setminus A$) a zároveň není celá v $X \setminus A$ (tedy protíná A). Podle definice to znamená $x \in \partial A$.

Odtud každý bod $x \in X$ leží v právě jedné z těchto tří množin. □

Věta 2.7 (Symetrie hranice). Pro libovolnou množinu $A \subseteq X$ platí $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Důkaz. Podmínka v definici hraničního bodu pro A zní: $\forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Díky komutativitě konjunkce je tato podmínka totožná s podmínkou pro hraniční bod doplnku $X \setminus A$, neboť $X \setminus (X \setminus A) = A$. □

Věta 2.8 (Charakterizace otevřené množiny). Množina $A \subseteq X$ je otevřená právě tehdy, když neobsahuje žádný svůj hraniční bod, tj. $\partial A \cap A = \emptyset$.

Důkaz. Dokážeme obě implikace krok za krokem:

1. ($\implies$) Nechť A je otevřená. Pak $A = \text{int } A$. Podle Věty 2.6 je $\text{int } A \cap \partial A = \emptyset$. Dosazením $A = \text{int } A$ dostáváme $A \cap \partial A = \emptyset$.
2. ($\impliedby$) Nechť $\partial A \cap A = \emptyset$. Z Věty 2.6 víme, že $X = \text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A$. Pro prvky množiny A tedy platí $A \subseteq \text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A$. Protože $A \cap \text{ext } A = \emptyset$ a $A \cap \partial A = \emptyset$, musí všichni zástupci A ležet v $\text{int } A$, tj. $A \subseteq \text{int } A$. Jelikož inkluze $\text{int } A \subseteq A$ platí vždy, dostáváme $A = \text{int } A$, tedy A je otevřená.

□

Věta 2.9 (Charakterizace uzavřené množiny). Množina $A \subseteq X$ je uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své hraniční body, tj. $\partial A \subseteq A$.

Důkaz. Množina A je uzavřená $\iff X \setminus A$ je otevřená $\iff \partial(X \setminus A) \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Protože $\partial(X \setminus A) = \partial A$, nerovnost zní $\partial A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, což je ekvivalentní inkluzi $\partial A \subseteq A$. $\square$

Věta 2.10 (Charakterizace uzávěru). Pro každou množinu $A \subseteq X$ platí $\overline{A} = \text{int } A \cup \partial A$, přičemž $\text{int } A \cap \partial A = \emptyset$.

Důkaz. Z Definice 2.3 máme $\overline{A} = A \cup \partial A$. Jelikož $\text{int } A \subseteq A$, dostáváme:

$$\text{int } A \cup \partial A \subseteq \overline{A}$$

Opačnou inkluzi dostaneme z rozdělení bodů množiny A na vnitřní body ($\text{int } A$) a hraniční body ($A \cap \partial A$), formálně zapsané

$$A = \text{int } A \cup (A \cap \partial A)$$

Odtud dostaneme

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \text{int } A \cup (A \cap \partial A) \cup \partial A = \text{int } A \cup \partial A$$

Poslední rovnost plyne z rovnosti $(A \cap \partial A) \cup \partial A = \partial A$. Disjunktnost plyne přímo z Věty 2.6. $\square$

Didaktická poznámka 2.11 (Rozpad množiny na vnitřek a hranici). Body libovolné množiny A se rozpadají na dvě disjunktní části: vnitřní body a hraniční body ležící v A . Množina je otevřená, pokud neobsahuje žádné hraniční body. Množina je uzavřená, pokud obsahuje všechny své hraniční body. Polouzavřené intervaly tvoří mezní případ — obsahují pouze část své hranice.

2.3 Množinové operace s otevřenými a uzavřenými množinami

Věta 2.12 (Konečné operace s otevřenými a uzavřenými množinami). Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- a) Jsou-li $U_1, U_2, \dots, U_n$ otevřené množiny v (X, d) , pak jejich průnik $\bigcap_{i=1}^n U_i$ i sjednocení $\bigcup_{i=1}^n U_i$ jsou otevřené množiny.
- b) Jsou-li $F_1, F_2, \dots, F_n$ uzavřené množiny v (X, d) , pak jejich průnik $\bigcap_{i=1}^n F_i$ i sjednocení $\bigcup_{i=1}^n F_i$ jsou uzavřené množiny.

Důkaz. Dokážeme indukcí tvrzení o průniku dvou otevřených množin U_1, U_2 : Nechť $x \in U_1 \cap U_2$. Jelikož $x \in U_1$ a U_1 je otevřená, existuje $r_1 > 0$ tak, že $B(x, r_1) \subseteq U_1$. Analogicky existuje $r_2 > 0$ tak, že $B(x, r_2) \subseteq U_2$. Položme $r = \min(r_1, r_2) > 0$. Pak $B(x, r) \subseteq B(x, r_1) \subseteq U_1$ a $B(x, r) \subseteq B(x, r_2) \subseteq U_2$. Odtud $B(x, r) \subseteq U_1 \cap U_2$. Průnik $U_1 \cap U_2$ je tedy otevřený. Matematickou indukci tvrzení rozšíříme na libovolný konečný počet n . Tvrzení pro uzavřené množiny plyne z aplikací De Morganových zákonů. $\square$

Věta 2.13 (Nekonečné operace s otevřenými a uzavřenými množinami). Nechť $\{U_i\}_{i \in I}$ je libovolný systém otevřených množin a $\{F_i\}_{i \in I}$ libovolný systém uzavřených množin v (X, d) . Pak:

a) Sjednocení $\bigcup_{i \in I} U_i$ je otevřená množina.

b) Průnik $\bigcap_{i \in I} F_i$ je uzavřená množina.

Důkaz. a) Volme $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Pak existuje $i_0 \in I$ tak, že $x \in U_{i_0}$. Protože U_{i_0} je otevřená, existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Sjednocení je otevřené. b) Plyne z a) použitím De Morganových zákonů. $\square$

Protipříklad 2.14 (Nekonečný průnik otevřených množin). Pro každý index $n \in \mathbb{N}$ uvažujme otevřenou množinu $U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$. Průnik těchto otevřených množin je:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

Jednobodová množina $\{0\}$ však není otevřená v $\mathbb{R}$, neboť neobsahuje žádnou otevřenou kouli $B(0, r) = (-r, r)$. Nekonečný průnik otevřených množin tedy nemusí být otevřená množina!

3 Aplikace a ilustrativní příklady v konkrétních prostorech

3.1 Topologická analýza v $(\mathbb{R}, |x - y|)$

Věta 3.1. V prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ platí:

- a) Otevřený interval (a, b) je otevřená množina.
- b) Uzavřený interval $[a, b]$ je uzavřená množina.
- c) Množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou obojetné (současně otevřené i uzavřené).
- d) Hranicí intervalů (a, b) , $[a, b]$ i $(a, b]$ je dvoudílná množina $\{a, b\}$.

Důkaz. Dokážeme d): Volme bod $x = a$. Pro libovolné $r > 0$ obsahuje okolí $B(a, r) = (a - r, a + r)$ bod $a + \frac{r}{2} \in (a, b)$ i bod $a - \frac{r}{2} \notin (a, b)$. Bod a je tedy hraničním bodem. Analogicky pro bod b . Pro jakýkoliv bod $x \in (a, b)$ volbou $r = \min(x - a, b - x) > 0$ dostaneme $B(x, r) \subseteq (a, b)$, takže vnitřní body nemohou být hraniční. Hranice je $\{a, b\}$. $\square$

3.2 Topologická analýza v diskrétním metrickém prostoru

Věta 3.2. V diskrétním metrickém prostoru (X, d_D) je každá podmnožina $A \subseteq X$ obojetná (zároveň otevřená i uzavřená) a pro její hranici platí $\partial A = \emptyset$.

Důkaz. Volme libovolný bod $x \in A$. Uvažujme kouli s poloměrem $r = \frac{1}{2}$. Z definice diskrétní metriky $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{y \in X \mid d_D(x, y) < \frac{1}{2}\} = \{x\}$. Jelikož $x \in A$, platí $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} \subseteq A$. Každý bod $x \in A$ je vnitřním bodem, takže A je otevřená. Jelikož tato vlastnost platí pro libovolnou podmnožinu, je i doplněk $X \setminus A$ otevřený, a tudíž A je zároveň uzavřená. Odtud $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int } A = A \setminus A = \emptyset$. $\square$

4 Posloupnosti a úplnost

4.1 Konvergentní posloupnosti a uzavřené množiny

Definice 4.1 (Konvergence posloupnosti). Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje k bodu $x \in X$ v metrickém prostoru (X, d) , pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Věta 4.2 (Sekvenciální charakterizace uzavřenosti). Množina $A \subseteq X$ je uzavřená v (X, d) právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost $(x_n) \subseteq A$ s limitou $x \in X$ platí $x \in A$.

Důkaz. 1. ($\implies$) Necht' A je uzavřená, $(x_n) \subseteq A$ a $x_n \rightarrow x$. Pokud by $x \notin A$, pak $x \in X \setminus A$. Protože $X \setminus A$ je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Ale z konvergence $x_n \rightarrow x$ musí pro dostatečně velká n platit $x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, což je spor s tím, že $x_n \in A$. Tedy $x \in A$.

2. ($\impliedby$) Dokažme obměnu: necht' A není uzavřená. Pak existuje hraniční bod $x \in \partial A$ takový, že $x \notin A$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ v kouli $B(x, \frac{1}{n})$ zvolme prvek $x_n \in A$ (což lze z definice hraničního bodu). Dostáváme posloupnost $(x_n) \subseteq A$, pro kterou $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, tedy $x_n \rightarrow x$, ale limita $x \notin A$. □

4.2 Cauchyovské posloupnosti a úplné metrické prostory

Definice 4.3 (Cauchyovská posloupnost a úplný prostor). • Posloupnost $(x_n) \subseteq X$ se nazývá *cauchyovská*, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n > n_0$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

• Metrický prostor (X, d) se nazývá *úplný*, pokud v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje k nějakému prvku $x \in X$.

Věta 4.4 (Konvergentní $\implies$ Cauchyovská). Každá konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je cauchyovská.

Důkaz. Necht' $x_n \rightarrow x$. Volme $\varepsilon > 0$. Z konvergence existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $k > n_0$ platí $d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro libovolná $m, n > n_0$ použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Posloupnost je cauchyovská. □

Příklad 4.5 (Neúplnost racionálních čísel $\mathbb{Q}$). Prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ není úplný metrický prostor.

Důkaz. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$. Všechny členy x_n jsou racionální čísla ($x_n \in \mathbb{Q}$). V prostoru $\mathbb{R}$ tato posloupnost konverguje k $\sqrt{2}$, takže je v $\mathbb{R}$ konvergentní, a tudíž cauchyovská. Protože $d(x_m, x_n) = |x_m - x_n|$, je tato posloupnost cauchyovská i v prostoru $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Nicméně její limita $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Posloupnost v $\mathbb{Q}$ nekonverguje. □

5 Didaktické shrnutí, miskoncepce a cvičení

5.1 Přehled typických studentských miskonceptů

Miskoncepce 5.1 (Otevřenost vs. Uzavřenost). „Pokud množina není otevřená, musí být uzavřená.“

Vysvětlení: Otevřenost a uzavřenost nejsou dikotomie. Polouzavřený interval $(a, b]$ v $\mathbb{R}$ není ani otevřený, ani uzavřený. Množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou naopak obojetné.

Miskoncepce 5.2 (Představa koule). „Koule musí mít kulatý tvar.“

Vysvětlení: Tvar koule závisí na metrice (např. čtverec v L_∞).

5.2 Vzorové řešené úlohy

Úloha 5.3. Nalezněte vnitřek, hranici a uzávěr množiny $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ v eukleidovském prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Řešení. Připomeňme intuitivní rozbor této množiny z Příkladu 1.3 v úvodní podkapitole. Nyní provedeme formální důkaz pomocí topologických definic:

1. **Vnitřek $\text{int } A$:** Množina A neobsahuje žádný otevřený interval, neboť mezi libovolnými dvěma reálnými čísly leží iracionální číslo. Proto pro libovolný bod $x \in A$ a pro každé $r > 0$ leží v kouli $B(x, r) = (x - r, x + r)$ prvky mimo A . Tedy $\text{int } A = \emptyset$.
2. **Hranice ∂A :** Každý bod $x_n = \frac{1}{n} \in A$ je hraniční, neboť v libovolném okolí leží body mimo A . Bod 0 je rovněž hraniční, neboť v libovolném okolí $(-\varepsilon, \varepsilon)$ leží prvky $\frac{1}{n} \in A$ pro $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $\partial A = A \cup \{0\}$.
3. **Uzávěr $\bar{A}$:** Podle Definice 2.3 platí $\bar{A} = A \cup \partial A = A \cup (A \cup \{0\}) = A \cup \{0\}$.

□