

Zopakujte si

Přípravný opakovací text k modulu Metrické prostory

Metodický učební materiál pro studenty učitelství matematiky

14. října 2026

Obsah

1	Množiny, inkluze a logické kvantifikátory	2
2	Intervaly a absolutní hodnota na $\mathbb{R}$	4
3	Množinové operace a De Morganovy zákony	5
4	Zobrazení a vzory množin	6
5	Limita posloupnosti reálných čísel	7

1 Množiny, inkluze a logické kvantifikátory

Před vstupem do teorie metrických prostorů je nezbytné precizovat jazyk množinové teorie, logických kvantifikátorů a technik dokazování inkluzí, které tvoří základní aparát pro definici topologických pojmů.

Definice 1.1 (Podmnožina a inkluze). Nechť A a B jsou množiny. Řekneme, že množina A je *podmnožinou* množiny B (píšeme $A \subseteq B$), právě když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B . Formálně pomocí implikace a všeobecného kvantifikátoru zapisujeme:

$$A \subseteq B \iff (\forall x : x \in A \implies x \in B). \quad (1)$$

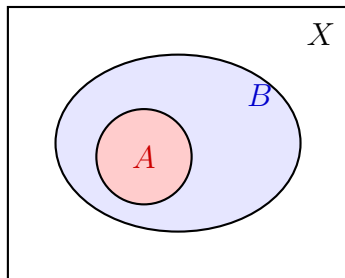
Negací výroku „ A je podmnožinou B “ je výrok „ A není podmnožinou B “ (píšeme $A \not\subseteq B$), což znamená, že existuje alespoň jeden prvek množiny A , který neleží v množině B . Formálně pomocí existenciálního kvantifikátoru a konjunkce zapisujeme:

$$A \not\subseteq B \iff \neg(\forall x : x \in A \implies x \in B) \iff (\exists x : x \in A \wedge x \notin B). \quad (2)$$

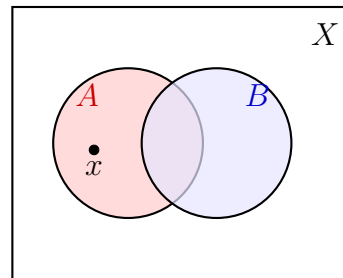
Didaktická poznámka 1.2. Při výuce na SŠ i VŠ studenti často chybují v rozlišování mezi relací náležitosti prvků ($\in$) a relací inkluze množin ($\subseteq$). Je nutné zdůraznit, že důkaz inkluze $A \subseteq B$ vždy začíná volbou libovolného, ale pevně zvoleného prvku $x \in A$, a posloupností implikací musíme dospět k závěru $x \in B$.

Naopak pro vyvrácení inkluze ($A \not\subseteq B$) stačí najít jediný protipříklad — prvek x , pro který platí $x \in A$ a současně $x \notin B$.

Poznámka 1.3 (Vennovy diagramy inkluze a její negace). Geometricky znázorňujeme inkluzi $A \subseteq B$ tak, že celá množina A leží uvnitř množiny B . Negaci $A \not\subseteq B$ znázorňujeme pomocí prvku $x \in A$, který se nachází vně množiny B .



Platí inkluze: $A \subseteq B$



Neplatí inkluze: $A \not\subseteq B$ ($\exists x : x \in A \wedge x \notin B$)

Příklad 1.4 (Inkluze vnořených geometrických kruhů). V eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujeme dva uzavřené kruhy $K_1 = K(S_1, r_1)$ a $K_2 = K(S_2, r_2)$ s poloměry $r_1, r_2 > 0$ a středy $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^2$. Nechť střed druhého kruhu leží v prvním kruhu, tj. $d(S_1, S_2) \leq r_1$, a nechť jeho poloměr je zvolen jako $r_2 = r_1 - d(S_1, S_2)$, kde $d(A, B)$ značí standardní eukleidovskou vzdálenost bodů. Dokažte krok za krokem z definice inkluze, že $K_2 \subseteq K_1$.

Důkaz. Postupujeme přesně podle Definice 1.1:

1. Volme libovolný bod $X \in K_2$.
2. Z definice kruhu $K_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(S_2, X) \leq r_2\}$ z toho vyplývá nerovnost:

$$d(S_2, X) \leq r_2.$$

3. Chceme ověřit, zda $X \in K_1$, neboli zda $d(S_1, X) \leq r_1$.
4. Aplikujeme eukleidovskou trojúhelníkovou nerovnost pro trojici bodů S_1, S_2, X :

$$d(S_1, X) \leq d(S_1, S_2) + d(S_2, X).$$

5. Dosadíme do pravé strany předchozího vztahu nerovnost $d(S_2, X) \leq r_2$:

$$d(S_1, X) \leq d(S_1, S_2) + r_2.$$

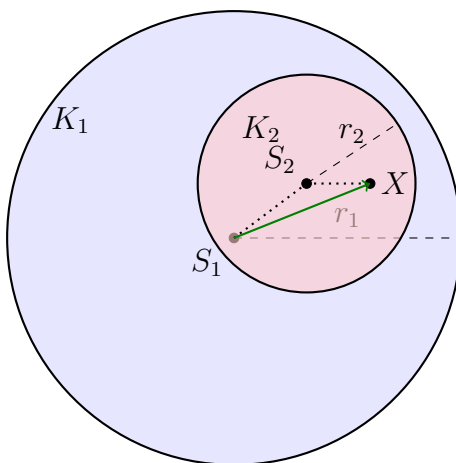
6. Za r_2 dosadíme předepsanou hodnotu $r_2 = r_1 - d(S_1, S_2)$:

$$d(S_1, X) \leq d(S_1, S_2) + (r_1 - d(S_1, S_2)) = r_1.$$

7. Získali jsme $d(S_1, X) \leq r_1$, což podle definice kruhu K_1 znamená, že $X \in K_1$.

Protože pro libovolné $X \in K_2$ platí $X \in K_1$, dokázali jsme z definice, že $K_2 \subseteq K_1$. $\square$

Poznámka 1.5 (Geometrická vizualizace). Předchozí příklad tvoří přímý geometrický předobraz důkazu věty, že otevřená koule $B(x, r)$ v obecném metrickém prostoru tvoří okolí každého svého bodu.



Příklad 1.6 (Důsledková úprava rovnice a inkluze množin kořenů). Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici s odmocninou $\sqrt{x+2} = x$. Ukažte, jak úprava umocněním souvisí s logickou implikací a jak z toho vyplývá vztah inkluze mezi množinou kořenů původní rovnice K_1 a množinou kořenů upravené rovnice K_2 .

Řešení a rozbor. Postupujme krok za krokem při rozboru logické struktury výpočtu:

1. **Analýza úpravy a implikace:** Při řešení rovnic umocněním obou stran využíváme základní algebru a pravidlo výrokové logiky:

$$a = b \implies a^2 = b^2. \quad (3)$$

Tato implikace platí obecně pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Je však zásadní si uvědomit, že ****neplatí obrácená implikace**** ($a^2 = b^2 \not\implies a = b$, neboť $a^2 = b^2 \iff a = b \vee a = -b$). Úprava umocněním je tedy ****důsledkovou (neekvivalentní) úpravou****.

2. **Aplikace na rovnici a výpočet K_2 :** Máme rovnici $\sqrt{x+2} = x$. Umocněním obou stran dostaneme implikovaný vztah:

$$\sqrt{x+2} = x \implies (\sqrt{x+2})^2 = x^2 \implies x+2 = x^2.$$

Úpravou získáme kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$, kterou rozložíme na součinný tvar $(x-2)(x+1) = 0$. Množina kořenů této umocněné rovnice je tedy:

$$K_2 = \{-1, 2\}.$$

3. **Souvislost s pojmem podmnožina (inkluzí):** Označme K_1 množinu všech reálných kořenů původní rovnice $\sqrt{x+2} = x$. Jelikož každý kořen $x \in K_1$ splňuje původní rovnici $\sqrt{x+2} = x$, z platnosti implikace $a = b \implies a^2 = b^2$ vyplývá, že tento prvek x musí nutně splňovat i umocněnou rovnici $x+2 = x^2$, a tudíž musí platit $x \in K_2$. Podle Definice 1.1 tak dostáváme přímý vztah mezi logickou implikací a inkluzí množin:

$$(\forall x : x \in K_1 \implies x \in K_2) \iff K_1 \subseteq K_2. \quad (4)$$

Důsledková úprava tedy **množinu kořenů nezmenší** (nevynechá žádný skutečný kořen), ale může ji **zvětšit** o tzv. „cizí kořeny“.

4. **Určení množiny K_1 pomocí zkoušky:** Dosazením prvků z nadmnožiny $K_2 = \{-1, 2\}$ do původní rovnice provedeme, které prvky do K_1 skutečně patří:

- Pro $x = 2$: $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 = x$ (rovnost platí $\implies 2 \in K_1$).
- Pro $x = -1$: $\sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1 = x$ (rovnost neplatí $\implies -1 \notin K_1$, jedná se o cizí kořen vnesený umocněním z relace $1^2 = (-1)^2$).

Množina kořenů původní rovnice je tedy $K_1 = \{2\}$. Získáváme tak názornou ilustraci ostré inkluze:

$$K_1 = \{2\} \subsetneq \{-1, 2\} = K_2.$$

□

Didaktická poznámka 1.7 (Význam zkoušky při důsledkových úpravách). Pro žáky na střední škole je zkouška často prezentována pouze jako formální kontrola aritmetické správnosti výpočtu. Tento příklad jasně ukazuje, že při použití důsledkových úprav (jako je umocňování) je zkouška **logicky nezbytnou součástí řešení**, která slouží k vyloučení cizích kořenů z nadmnožiny K_2 a k nalezení skutečné množiny kořenů K_1 .

2 Intervaly a absolutní hodnota na $\mathbb{R}$

Definice 2.1 (Intervaly na reálné ose). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Podmnožiny reálných čísel definované pomocí následujících nerovností nazýváme omezenými intervaly:

- *Otevřený interval:* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
- *Uzavřený interval:* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- *Polouzavřený interval zleva:* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,

- *Polouzavřený interval zprava:* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Věta 2.2 (Vlastnosti absolutní hodnoty). Pro absolutní hodnotu reálného čísla $|x| = \max(x, -x)$ platí pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- a) $|x| \geq 0$, přičemž $|x| = 0 \iff x = 0$ (Nezápornost a separabilita),
- b) $|x - y| = |y - x|$ (Symetrie),
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Trojúhelníková nerovnost pro součet),
- d) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ (Trojúhelníková nerovnost pro vzdálenost).

Důkaz. Důkazy částí c) a d) uvádíme krok za krokem:

1. Důkaz c): Platí $-|x| \leq x \leq |x|$ a zároveň $-|y| \leq y \leq |y|$. Sečtením těchto nerovností dostaneme:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Tato oboustranná nerovnost je podle definice absolutní hodnoty ekvivalentní zápisu $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. Důkaz d): Využijeme algebraickou identitu $x - y = (x - z) + (z - y)$. Aplikací části c) na čísla $u = x - z$ a $v = z - y$ dostáváme:

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Tím je věta dokázána. □

Příklad 2.3 (Inkluze intervalů). Dokažte, že pokud $a_2 \leq a_1 < b_1 \leq b_2$, pak platí inkluze intervalů $(a_1, b_1) \subseteq [a_2, b_2]$.

Důkaz. Volme libovolné $x \in (a_1, b_1)$. Z definice otevřeného intervalu platí $a_1 < x < b_1$. Z předpokladů zavedeme nerovnosti:

$$a_2 \leq a_1 < x < b_1 \leq b_2 \implies a_2 \leq x \leq b_2.$$

Z nerovnosti $a_2 \leq x \leq b_2$ přímo plyne $x \in [a_2, b_2]$. Inkluze tedy platí. □

3 Množinové operace a De Morganovy zákony

Definice 3.1 (Množinové operace). Necht' A, B jsou podmnožiny základní množiny (prostoru) X . Definujeme:

- *Sjednocení:* $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$,
- *Průnik:* $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$,
- *Doplňěk (komplement):* $X \setminus A = A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$.

Pro libovolný systém podmnožin $\{A_i\}_{i \in I}$, kde I je indexová množina, definujeme sjednocení a průnik jako:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Věta 3.2 (De Morganovy zákony). Necht' X je základní množina a $\{A_i\}_{i \in I}$ je libovolný systém podmnožin v X . Pak platí:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i), \quad (5)$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i). \quad (6)$$

Důkaz. Dokážeme první vztah pomocí oboustranné inkluze:

1. Důkaz inkluze $\subseteq$: Volme libovolné $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$.
 - To znamená, že $x \in X$ a zároveň $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$.
 - Negací definice sjednocení platí: neexistuje žádné $i \in I$ takové, aby $x \in A_i$.
 - Tedy pro všechna $i \in I$ platí $x \notin A_i$, což znamená pro všechna $i \in I$: $x \in (X \setminus A_i)$.
 - Z definice průniku to dává $x \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$.
2. Důkaz inkluze $\supseteq$: Volme libovolné $x \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$.
 - Pak pro všechna $i \in I$ platí $x \in (X \setminus A_i)$, což značí $\forall i \in I : x \notin A_i$.
 - Odtud prvek x neleží v žádné množině A_i , neboli $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$.
 - Tedy $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

Z obou inkluzí plyne požadovaná množinová rovnost. Druhá rovnost se dokáže analogicky. $\square$

4 Zobrazení a vzory množin

Definice 4.1 (Obraz a vzor množiny). Necht' $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení množiny X do množiny Y .

- Pro podmnožinu $A \subseteq X$ definujeme *obraz množiny* A jako:

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

- Pro podmnožinu $B \subseteq Y$ definujeme *vzor množiny* B jako:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Didaktická poznámka 4.2. Zápis $f^{-1}(B)$ označuje *vzor množiny* a je definován pro absolutně libovolné zobrazení f . Nejedná se o aplikaci inverzního zobrazení, tudíž zobrazení f nemusí být prosté ani na!

Věta 4.3 (Vlastnosti vzoru množin). Necht' $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení a $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Pak platí:

$$\text{a) } f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B),$$

$$\text{b) } f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),$$

$$\text{c) } f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Důkaz. Dokážeme část a):

$$x \in f^{-1}(Y \setminus B) \iff f(x) \in (Y \setminus B) \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in X \setminus f^{-1}(B).$$

Ekvivalenty krok za krokem dokazují rovnost množin. $\square$

Protipříklad 4.4 (Neplatnost vlastností pro přímý obraz). Na rozdíl od vzoru, pro obraz množin obecně neplatí rovnost s průnikem! Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, a množiny $A_1 = [-2, 0]$, $A_2 = [0, 2]$. Pak $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, tedy $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$. Avšak $f(A_1) = [0, 4]$ a $f(A_2) = [0, 4]$, takže $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 4] \neq \{0\}$.

5 Limita posloupnosti reálných čísel

Definice 5.1 (Limita posloupnosti v $\mathbb{R}$). Řekneme, že posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu $a \in \mathbb{R}$ (píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$), pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Formálně:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Didaktická poznámka 5.2. Při přechodu k metrickým prostorům nahradíme výraz $|a_n - a|$ obecným výrazem metriky $d(x_n, x)$. Nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ vyjadřuje geometrický fakt, že prvky posloupnosti od indexu n_0 leží v ε -okolí bodu a .