

Lineární zobrazení v komplexním oboru: Od algebry ke geometrii

20. prosince 2022

1. Úvod: Od algebry ke geometrii

V tomto textu prozkoumáme fascinující spojení mezi jednoduchou algebraickou rovnicí a elegantními geometrickými transformacemi. Ukážeme si, že každé lineární zobrazení tvaru $f(z) = az + b$ v komplexním oboru odpovídá některému ze známých podobných zobrazení v Gaussově rovině – jako je posunutí, otočení či stejnolehlost.

Nejdříve si rozebereme, jakou transformaci představuje daná rovnice v závislosti na hodnotách koeficientů a a b . Poté se vydáme opačnou cestou: pro zadané podobné zobrazení nalezneme příslušnou lineární funkci.

Definice lineárního zobrazení

Ve shodě se standardní definicí budeme pod lineárním zobrazením rozumět zobrazení

$$z \mapsto az + b, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0. \quad (1)$$

2. Invariantní bod a klasifikace zobrazení

Klíčem k pochopení geometrie zobrazení je jeho **invariantní bod** – tedy bod, který se zobrazí sám na sebe ($f(z_0) = z_0$). V geometrii jej zpravidla nazýváme samodružným bodem. Nalezneme ho řešením rovnice:

$$az_0 + b = z_0 \implies z_0(1 - a) = b$$

Z této rovnice plynou dva základní případy.

Případ 1: $a = 1$ (Posunutí a identita)

Pokud $a = 1$, rovnice pro invariantní bod se zjednoduší na $0 = b$.

- $b = 0$: Zobrazení má tvar $z \mapsto z$. Jedná se o **identitu**, každý bod je invariantní.
- $b \neq 0$: Rovnice $0 = b$ nemá řešení. Zobrazení $z \mapsto z + b$ tedy nemá žádný invariantní bod a představuje **posunutí** o vektor daný komplexním číslem b .

Případ 2: $a \neq 1$ (Otočení a stejnolehlost)

Pokud $a \neq 1$, existuje právě jeden invariantní bod $z_0 = \frac{b}{1-a}$. Abychom lépe pochopili geometrický význam, odečteme rovnice $w = az + b$ a $z_0 = az_0 + b$. Tím vyloučíme b a získáme vztah, jehož středem je právě invariantní bod z_0 :

$$w - z_0 = a(z - z_0) \quad (2)$$

Tato rovnice nám říká, že vektor z invariantního bodu z_0 do obrazu w získáme vynásobením vektoru z z_0 do vzoru z komplexním číslem a .

Geometrická interpretace koeficientu a

Vztah mezi vzorem z a obrazem w závisí na komplexním koeficientu a :

- **Otočení:** Pokud $|a| = 1$, jde o čisté **otočení** kolem z_0 o úhel $\varphi = \arg(a)$.
- **Stejnolehlost:** Pokud je a reálné kladné číslo ($a \in \mathbb{R}^+$), jde o **stejnolehlost** se středem z_0 a koeficientem a .
- **Otočná stejnolehlost (Spirální podobnost):** V obecném případě jde o složení **otočení** (o úhel $\arg(a)$) a **stejnolehlosti** (s koeficientem $|a|$) se společným středem z_0 .

3. Nalezení zobrazení ze dvou párů bodů

Nyní se zaměříme na opačný problém: máme zadáno podobné zobrazení v rovině a hledáme lineární funkci, která ho realizuje. Ukážeme, že pro libovolné dva body a jejich obrazy existuje právě jedno takové zobrazení, které zachovává orientaci. Pro odvození nám poslouží mocný nástroj: **poměr tří bodů**.

Definice: Poměr bodů

Pro tři navzájem různé body z_1, z_2, z_3 definujeme jejich poměr jako komplexní číslo:

$$p(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

Toto jediné číslo v sobě kóduje celý tvar trojúhelníku $z_1 z_2 z_3$:

- **Argument** tohoto čísla, $\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$, udává **orientovaný úhel** u vrcholu z_1 .
- **Absolutní hodnota**, $\left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right|$, udává poměr délek stran $|z_3 z_1|/|z_2 z_1|$.

Podobné zobrazení zachovávající orientaci musí zachovat i tento poměr pro jakoukoliv trojici bodů a jejich obrazů. Pokud se tedy body z_1, z, z_2 zobrazí na w_1, w, w_2 , musí platit:

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Tato rovnost je klíčem k nalezení hledaného zobrazení. Jednoduchou úpravou získáme explicitní tvar.

Nalezení lineárního zobrazení

Podobné zobrazení zachovávající orientaci, které zobrazuje $z_1 \mapsto w_1$ a $z_2 \mapsto w_2$ ($z_1 \neq z_2$), je popsáno právě jednou lineární funkcí:

$$f(z) = w_1 + \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) \quad (3)$$

kde koeficient $a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}$ plně určuje typ zobrazení (otočení, stejnoolehlost atd.).

4. Řešený příklad

Určete lineární zobrazení f , pro které platí $f(1 + i) = 2$ a $f(1 - i) = 3$.

Řešení: Nejprve vypočteme koeficient a podle odvozeného vztahu:

$$a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} = \frac{3 - 2}{(1 - i) - (1 + i)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

Jelikož $|a| = 1/2$ a $\arg(a) = \pi/2$ (tj. 90°), půjde o otočnou stejnoolehlost: složení otočení o 90° v kladném směru a stejnoolehlosti s koeficientem $1/2$.

Nyní dosadíme do obecného vzorce pro $f(z)$:

$$f(z) = w_1 + a(z - z_1) = 2 + \frac{i}{2}(z - (1 + i)) = 2 + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2} - \frac{i^2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{i}{2}(z - 1)$$

Nakonec najdeme střed zobrazení (invariantní bod z_0) z rovnice $f(z_0) = z_0$:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{i}{2}(z_0 - 1 - i) &= z_0 \\ 2 - \frac{i}{2} + \frac{1}{2} &= z_0 \left(1 - \frac{i}{2}\right) \\ \frac{5}{2} - \frac{i}{2} &= z_0 \frac{2 - i}{2} \\ z_0 &= \frac{5 - i}{2 - i} = \frac{(5 - i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{10 + 5i - 2i - i^2}{4 - i^2} = \frac{11 + 3i}{5} \end{aligned}$$

Závěr: Zobrazení je otočení o 90° v kladném směru složené se stejnoolehlostí s koeficientem $1/2$. Střed obou transformací je v bodě $z_0 = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}i$.