

Spojítost v komplexním světě: Jak to pochopit a k čemu je to dobré?

Návrh přeforumulování pro studenty

15. října 2025

Vítejte u krátkého průvodce spojitostí funkcí v komplexních číslech. Možná si říkáte, že definice s „epsilony a deltami“ je trochu strašidelná. Ale nebojte se! Ukážeme si, že myšlenka za ní je velice intuitivní a že právě spojitost nám pomůže dokázat tak zásadní věc, jakou je **základní věta algebry**.

Co je to „okolí“? Představte si to jako osobní zónu

Než se pustíme do spojitosti, musíme si ujasnit, co znamená, že jsou si dva body v komplexní rovině „blízko“. K tomu slouží pojem **okolí bodu**.

Představte si bod z_0 v Gaussově rovině. Jeho **okolí** je jednoduše kruh se středem v z_0 a nějakým poloměrem, kterému říkáme ε (epsilon). Matematicky to zapíšeme takto:

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Tento zápis říká: „Vezmi všechna komplexní čísla z , jejichž vzdálenost od z_0 je menší než ε .“ Vzdálenost tu měříme pomocí absolutní hodnoty, přesně jak jsme zvyklí.

Spojítost: Malá změna na vstupu, malá změna na výstupu

Co to tedy znamená, že je funkce f **spojitá** v bodě z_0 ? Lidsky řečeno:

Pokud se z pohne jen o kousek od z_0 , pak se $f(z)$ pohne jen o kousek od $f(z_0)$.

A teď to zkusme propojit s naší formální definicí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in B_\delta(z_0))(f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0)))$$

Rozeberme si to krok za krokem:

1. $(\forall \varepsilon > 0)$: Zvol si **libovolně malý** cílový kruh (okolí) s poloměrem ε okolo výstupní hodnoty $f(z_0)$. Můžeš si ho představit jako terč, do kterého se chceme trefit.
2. $(\exists \delta > 0)$: K tomuto tvému cílovému kruhu **musí existovat** nějaký startovní kruh s poloměrem δ (delta) okolo vstupní hodnoty z_0 .
3. $(\forall z \in B_\delta(z_0))(f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0)))$: Tento startovní kruh musí být takový, že ať si z něj vybereš **jakýkoliv** bod z , jeho obraz $f(z)$ se **zaručeně trefí** do tebou zvoleného cílového kruhu.

Zkrátka, ať si kdokoliv vymyslí jakkoliv malou toleranci ε na výstupu, my jsme vždy schopni najít takovou toleranci δ na vstupu, která nám zaručí, že se do té výstupní tolerance vejde.

Jednoduché příklady

- **Konstantní funkce** $f(z) = c$: Ať se z hýbe, jak chce, výsledek je vždy c . Takže se vždy trefí do jakéhokoli okolí bodu c . Je tedy spojitá všude.
- **Identita** $f(z) = z$: Tady se výstup mění stejně jako vstup. Pokud si tedy zvolíme cílový kruh s poloměrem ε , stačí nám vzít startovní kruh se stejným poloměrem ($\delta = \varepsilon$) a máme jistotu, že se trefíme. Je také spojitá všude.

Dobrá zpráva: Polynomy jsou vždy spojitě!

Nemusíme to dokazovat pro každou funkci zvlášť. Platí totiž šikovná věta: když sečtete, odečtete nebo vynásobíte dvě spojitě funkce, výsledek je opět spojitá funkce. Dělit můžete také, pokud zrovna nedělíte nulou.

A z čeho je složený polynom $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$? Jen z konstant (a_k) a identity (z) , které jsou pospojované sčítáním a násobením. Z toho plyne jednoduchý, ale mocný důsledek:

Každý polynom je spojitý v celé komplexní rovině.

K čemu to všechno je? Důkaz základní věty algebry

Ted' přichází to nejlepší. Ukážeme si, jak nám spojitost polynomů pomůže nahlédnout, proč má každý polynom (který není jen konstanta) alespoň jeden kořen v komplexních číslech. Myšlenka je geniálně jednoduchá a má dvě části. Budeme sledovat, co polynom P udělá s kružnicemi o různém poloměru r se středem v počátku.

1. Co se děje s malými kružnicemi?

Předpokládejme, že $P(0) = a_0 \neq 0$. Protože je polynom spojitý, víme, že když je z velmi blízko nuly, hodnota $P(z)$ musí být velmi blízko $P(0)$, tedy a_0 . To znamená, že když vezmeme dostatečně malou kružnici okolo počátku, její obraz bude celý ležet někde v okolí bodu a_0 . Důležité je, že tento obraz **neoběhne počátek**. Počítadlo oběhů by ukázalo **nulu**.

2. Co se děje s obrovskými kružnicemi?

Uvažujme polynom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Když je $|z|$ opravdu velké, člen $a_n z^n$ je mnohem větší než všechny ostatní dohromady. Funkce $P(z)$ se tedy chová skoro stejně jako $a_n z^n$.

A co dělá funkce $g(z) = a_n z^n$? Vezme kružnici o poloměru r , zvětší ji a n -krát ji obtočí kolem počátku. Protože se $P(z)$ pro velká z chová skoro stejně, obraz obrovské kružnice pod $P(z)$ také **oběhne počátek n -krát**, kde n je stupeň polynomu.

Velké finále

Ted' to spojíme dohromady. Máme funkci, která každému poloměru r přiřadí, kolikrát obraz kružnice o tomto poloměru oběhne počátek.

- Pro velmi malé r je počet oběhů **0**.
- Pro velmi velké r je počet oběhů **n** .

Protože je polynom spojitý, nemůže se počet oběhů změnit skokem (např. z 0 rovnou na 1). Musí se měnit plynule. Ale počet oběhů musí být vždy celé číslo! Jak je to možné?

Jediný způsob, jak se může počet oběhů změnit, je ten, že obraz kružnice v nějakém okamžiku **projde přímo počátkem**. A co to znamená, že obraz $P(z)$ projde počátkem? No přece to, že pro nějaké z platí $P(z) = 0$.

A je to! Právě jsme ukázali, že musí existovat alespoň jedno komplexní číslo z , které je kořenem polynomu.

Podrobnější rozbor obrazů kružnic

Pojďme nyní zformálnit intuitivní úvahy z předchozí sekce.

Obraz malé kružnice ($r \rightarrow 0^+$)

Předpokládáme, že $a_0 = P(0) \neq 0$. Jelikož je polynom P spojitý v bodě $z_0 = 0$, můžeme k $\varepsilon = |a_0|$ najít takové $\delta > 0$, že pro všechna z splňující $|z - 0| < \delta$ platí $|P(z) - P(0)| < \varepsilon$. Po dosazení $|P(z) - a_0| < |a_0|$.

Zvolíme-li tedy poloměr naší kružnice $r < \delta$, pak pro každé z na této kružnici leží jeho obraz $P(z)$ v kruhu $B_\varepsilon(a_0)$. Tento kruh ale neobsahuje počátek, protože jeho vzdálenost od počátku je $|a_0|$ a jeho poloměr je také $|a_0|$. Obraz malé kružnice tedy nemůže oběhnout počátek a počet oběhů je 0.

Obraz velké kružnice ($r \rightarrow \infty$)

Chceme ukázat, že pro dostatečně velké $|z| = r$ se polynom $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ (kde $a_n \neq 0, n \geq 1$) chová podobně jako jeho vedoucí člen $g(z) = a_n z^n$. Konkrétně ukážeme, že platí $|P(z) - g(z)| < |g(z)|$.

Rozepišme rozdíl:

$$|P(z) - g(z)| = |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0|$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti a $|z| = r$ dostaneme:

$$\leq |a_{n-1}|r^{n-1} + |a_{n-2}|r^{n-2} + \dots + |a_0|$$

Chceme, aby tento výraz byl menší než $|g(z)| = |a_n z^n| = |a_n| r^n$. Podělme tedy nerovnost $|a_n| r^n$:

$$\frac{|a_{n-1}|}{|a_n| r} + \frac{|a_{n-2}|}{|a_n| r^2} + \dots + \frac{|a_0|}{|a_n| r^n} < 1$$

Levá strana nerovnosti je součet členů, které s rostoucím r klesají k nule. Zcela jistě tedy existuje takové R , že pro všechna $r > R$ je součet menší než 1 a nerovnost platí.

Co nerovnost $|P(z) - g(z)| < |g(z)|$ znamená? Říká nám, že bod $P(z)$ je k bodu $g(z)$ blíže, než je bod $g(z)$ k počátku. Geometricky to znamená, že bod

$P(z)$ leží v otevřeném kruhu se středem v $g(z)$ a poloměrem $|g(z)|$. Protože tento kruh neobsahuje počátek 0, nemůže ani úsečka spojující 0 a $P(z)$ být opačným vektorem k úsečce z 0 do $g(z)$. Laicky řečeno, $P(z)$ je vždy „na stejné straně“ od počátku jako $g(z)$.

Proto se celková změna argumentu (úhlu) křivky $P(z)$ musí rovnat celkové změně argumentu křivky $g(z)$, když z oběhne jednu kružnici.

Obraz kružnice $|z| = r$ funkcí $g(z) = a_n z^n$ je křivka $w(t) = a_n (re^{it})^n = a_n r^n e^{int}$ pro $t \in [0, 2\pi]$. Argument tohoto bodu, $nt + \arg(a_n)$, se za celý interval změní o $n \cdot 2\pi$. Celková změna argumentu je tedy $n \cdot 2\pi$, a proto je počet oběhů přesně $\mathbf{n}$, stupeň polynomu.