

Analýza v komplexním oboru: Elementární funkce

1 Definice exponenciální a goniometrických funkcí

Při zavádění těchto funkcí vycházíme z poznatků reálné analýzy, kde jsou funkce definovány jako součty mocninných řad. Tento přístup nám následně umožňuje přirozené rozšíření (analytické pokračování) do komplexního oboru.

1.1 Definice v reálném oboru $\mathbb{R}$

V reálném oboru definujeme funkce $\exp(x)$, $\sin x$ a $\cos x$ pomocí jejich Taylorových řad se středem v nule (Maclaurinovy řady). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ tyto řady absolutně konvergují a mají tvar:

Exponenciála:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Sinus:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Kosinus:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

1.2 Rozšíření do komplexního oboru $\mathbb{C}$

Rozdíl při přechodu do $\mathbb{C}$ spočívá v tom, že za proměnnou dosazujeme komplexní číslo $z = x + iy$. Definice funkcí zůstávají formálně shodné, tedy pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ definujeme:

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

1.3 Charakter změn při přechodu do komplexního oboru

Přechod od reálné proměnné x ke komplexní proměnné z není pouze formální záměnou symbolů. I když řady vypadají stejně, význam a vlastnosti výsledných funkcí se zásadně transformují.

Ztráta geometrické názornosti a nutnost analytické definice

V reálném oboru jsme zvyklí na intuitivní geometrické definice: sinus a kosinus jako souřadnice bodu na jednotkové kružnici, exponenciálu jako spojitý růst. V komplexním oboru však tyto představy selhávají.

Pojem jednotkové kružnice v $\mathbb{R}^2$ nelze přímo použít, pokud je argumentem komplexní číslo z . Stejně tak výraz e^z , kde $z = x + iy$, nelze chápat jako opakované násobení.

Abychom se vyhnuli logickým nekonzistencím, volíme ryze analytický přístup. Definice pomocí mocninných řad:

- stojí na pevných základech teorie konvergence,
- umožňuje jednotnou definici na celé $\mathbb{C}$,
- zaručuje holomorfnost funkcí.

Absolutní konvergence

Pro korektnost definice je nutné, aby řady konvergovaly. Pomocí podílového kritéria lze ukázat, že pro e^z , $\sin z$ i $\cos z$ je poloměr konvergence $R = \infty$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty$$

Díky $R = \infty$ konvergují tyto řady absolutně a stejnoměrně v celém $\mathbb{C}$. Z vlastností mocninných řad vyplývá, že funkce jsou v celém kruhu konvergence holomorfní.

Holomorfnost

Holomorfní funkce jsou komplexní funkce definované na otevřených podmnožinách komplexní roviny $\mathbb{C}$ takové, že jsou komplexně diferencovatelné. Diferencovatelnost v komplexních číslech je silnější požadavek než v číslech reálných a implikuje fakt, že daná funkce je nekonečně diferencovatelná a rozvinutelná do Taylorovy řady. Funkce holomorfní na celé komplexní rovině se označuje jako **celistvá** (celá).

V komplexním oboru je požadavek na derivaci podle komplexní proměnné z mnohem přísnější než v oboru reálném.

Definice 1.1 (Holomorfnost). Funkce f je holomorfní v bodě z_0 , pokud existuje limita

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

kde $h \in \mathbb{C}$. Klíčovým požadavkem je, aby hodnota této limity byla stejná bez ohledu na to, z jakého směru se v komplexní rovině k bodu z_0 blížíme (tzv. nezávislost na cestě).

Holomorfní funkce mají určité vlastnosti, které jsou pro nás užitečné. Platí, že součet, rozdíl i součin dvou holomorfních funkcí je opět holomorfní. Podíl je holomorfní všude tam, kde je jmenovatel nenulový. Fascinující vlastností také je, že derivace holomorfní funkce je opět holomorfní funkcí. To znamená, že má-li funkce první komplexní derivaci, má automaticky derivace všech řádů.

Holomorfnost má také určitý vztah k řadám. Funkce, která je holomorfní v okolí bodu z_0 , lze v tomto okolí vždy jednoznačně rozvinout do Taylorovy řady. Tato řada konverguje na kruhu o poloměru ω , což je vzdálenost k nejbližší singularitě. Kdy singularita je v matematice obecný název bodu, ve kterém daný matematický objekt není definován,

nebo kde se objekt nechová v jistém smyslu rozumně - například není diferencovatelný. V našem případě je tedy singularita bod, kde funkce přestává být holomorfní. Jelikož ale naše funkce žádné singularity nemají, můžeme říci, že konvergují na celém $\mathbb{C}$.

Typickým příkladem neholomorfní funkce je například absolutní hodnota $|z|$, nebo reálná část $\operatorname{Re}(z)$ a imaginární část $\operatorname{Im}(z)$ holomorfní funkce. Tyto funkce totiž nesplňují přísné podmínky pro existenci komplexní derivace (tzv. Cauchyho-Riemannovy podmínky).

Eulerův vzorec

Díky do přechodu z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ vznikne také určitý vztah mezi funkcemi $\exp(x)$, $\sin x$ a $\cos x$. Tento vztah je známý jako **Eulerův vzorec**.

Věta 1.1 (Eulerův vzorec). *Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Důkaz. Při odvození využijeme mocniny imaginární jednotky i :

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

Dosadíme iz do Taylorovy řady pro exponenciálu:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \dots$$

Vzhledem k výše uvedeným mocninám i můžeme řadu přerovnat (což nám dovoluje právě **absolutní konvergence**) na reálnou a imaginární část:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

Uvnitř závorek rozpoznáváme Taylorovy řady pro funkce $\cos z$ a $\sin z$ (viz Definice 1.1). Dostáváme tak fundamentální Eulerův vzorec:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

□

Eulerův vzorec nám tak umožňuje definovat goniometrické funkce bez nutnosti používat nekonečné řady, pouze pomocí exponenciální funkce. Stejný postup můžeme použít pro argument $-iz$:

$$e^{-iz} = e^{i(-z)} = \cos(-z) + i \sin(-z),$$

kde díky sudosti kosinu $\cos(-z) = \cos z$ a lichosti sinu $\sin(-z) = -\sin z$ dostaneme:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

Nyní máme soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé $\cos z$ a $\sin z$:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{1}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{2}$$

Sečtením rovnic (1) a (2) eliminujeme člen s imaginární jednotkou a sinem:

$$\begin{aligned}(e^{iz}) + (e^{-iz}) &= (\cos z + i \sin z) + (\cos z - i \sin z) \\ e^{iz} + e^{-iz} &= 2 \cos z + (i \sin z - i \sin z) \\ e^{iz} + e^{-iz} &= 2 \cos z\end{aligned}$$

Odtud po vydělení dvěma dostáváme výsledný vztah pro kosinus:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Obdobně odečtením rovnice (2) od rovnice (1) eliminujeme člen s kosinem:

$$\begin{aligned}(e^{iz}) - (e^{-iz}) &= (\cos z + i \sin z) - (\cos z - i \sin z) \\ e^{iz} - e^{-iz} &= \cos z - \cos z + i \sin z - (-i \sin z) \\ e^{iz} - e^{-iz} &= 2i \sin z\end{aligned}$$

Odtud po vydělení výrazem $2i$ dostáváme výsledný vztah pro sinus:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Tato vyjádření, odvozená z **Eulerův vzorec** se často využívají jako **primární definice** goniometrických funkcí, neboť jsou výpočetně efektivnější než operace s nekonečnými řadami.

V komplexním oboru také dochází k hlubokému propojení goniometrických funkcí s funkcemi hyperbolickými ($\sinh, \cosh$). Toto propojení vysvětluje, proč goniometrické funkce v $\mathbb{C}$ pozbývají svou reálnou omezenost. Tato vyjádření se v komplexní analýze využívají jako alternativní (a často praktičtější) definice goniometrických funkcí.

Při odvození vycházíme ze vztahu pro komplexní sinus a dosadíme za argument ryze imaginární číslo $z = iy$:

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{i^2y} - e^{-i^2y}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}$$

Tento výraz upravíme vynásobením čitatele i jmenovatele hodnotou $-i$:

$$\sin(iy) = \frac{-i(e^{-y} - e^y)}{2i(-i)} = \frac{i(e^y - e^{-y})}{2} = i \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Protože výraz $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$ definuje hyperbolický sinus $\sinh y$, získáváme identitu:

$$\sin(iy) = i \sinh y$$

Analogicky postupujeme pro kosinus s využitím jeho exponenciálního vyjádření:

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{i^2y} + e^{-i^2y}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$$

Jelikož $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$ definuje hyperbolický kosinus $\cosh y$, dostáváme vztah:

$$\cos(iy) = \cosh y$$

Význam pro analýzu

Tato syntéza vysvětluje neomezenost goniometrických funkcí v $\mathbb{C}$. Zatímco v reálném oboru jsou funkce $\sin x$ a $\cos x$ omezené, v komplexním oboru díky vztahu k funkci $\cosh y$ (která pro $y \rightarrow \infty$ roste nade všechny meze) mohou nabývat libovolně velkých hodnot.

2 Cauchyův součin řad a vlastnosti exponenciály

Při práci s nekonečnými řadami v komplexním oboru potřebujeme pravidlo pro jejich násobení. Zatímco u konečných polynomů je postup jasný, u nekonečných řad musíme zajistit, aby výsledný součet dával smysl.

2.1 Definice Cauchyova součinu řad

Mějme dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ s komplexními členy $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Jejich **Cauchyův součin** je definován jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, jejíž členy jsou určeny vztahem:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

2.2 Věta o Cauchyově součinu absolutně konvergentních řad

Tato věta stanovuje podmínky, za kterých je operace součinu korektní:

Věta 2.1. *Necht' řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Pak je i jejich Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolutně konvergentní a platí:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

2.3 Odvození vztahu pro exponenciálu součtu

Pomocí výše uvedené věty dokážeme, že pro libovolná $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí základní funkcionální rovnice:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

Důkaz. Definujeme členy řad pro obě exponenciály: $a_k = \frac{z_1^k}{k!}$ a $b_l = \frac{z_2^l}{l!}$. Víme, že tyto řady konvergují absolutně v celém $\mathbb{C}$. Sestavíme člen c_n jejich Cauchyova součinu:

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

Výraz upravíme rozšířením zlomku hodnotou $n!$:

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Podle binomické věty je suma uvnitř výrazu rovna $(z_1 + z_2)^n$. Dostáváme tedy:

$$c_n = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}$$

Celý součin řad je pak roven:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$$

□

3 Věta o jednoznačnosti (identitě) a její důsledky

Tato kapitola představuje jeden z nejsilnějších nástrojů komplexní analýzy. Věta o jednoznačnosti nám dává „legitimní právo“ používat vše, co známe z reálných čísel, i v komplexním oboru, aniž bychom museli každý vzorec znovu pracně dokazovat z definic řad.

3.1 Věta o jednoznačnosti

V komplexní analýze platí, že holomorfní funkce je tak pevně svázána se svými hodnotami, že její chování na reálné ose jednoznačně určuje její chování v celém komplexním světě.

Věta 3.1 (Věta o jednoznačnosti). *Necht' $f_1(z)$ a $f_2(z)$ jsou dvě holomorfní funkce na celém komplexním oboru $\mathbb{C}$. Pokud platí, že se tyto funkce shodují pro všechna reálná čísla, tedy:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_1(x) = f_2(x)$$

pak se tyto funkce nutně musí shodovat i pro všechna komplexní čísla:

$$\forall z \in \mathbb{C} : f_1(z) = f_2(z)$$

Poznámka k obecnosti

Tato věta se dá formulovat i obecněji pro libovolnou oblast $D \subset \mathbb{C}$. Stačí, aby se funkce f_1, f_2 shodovaly na nějaké množině M , která má v D alespoň jeden hromadný bod (což reálná osa splňuje). V takovém případě je shoda funkcí v celém D zaručena.

3.2 Důsledky pro elementární funkce

Hlavním přínosem této věty je tzv. princip analytického pokračování identit. Díky němu víme, že algebraické vztahy, které jsme zvyklí používat v $\mathbb{R}$, zůstávají v platnosti i po rozšíření do $\mathbb{C}$.

- Přenos goniometrických identit:** Uvažujme například základní vztah $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Definujme levou stranu jako holomorfní funkci $f_1(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$ a pravou stranu jako holomorfní funkci $f_2(z) = 1$. Z reálné analýzy víme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f_1(x) = f_2(x)$. Podle věty o jednoznačnosti musí tato rovnost platit i pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Stejným způsobem se do komplexního oboru přenáší všechny součtové vzorce, vzorce pro dvojnásobné argumenty a další identity.
- Funkcionální rovnice exponenciály:** Věta o jednoznačnosti poskytuje alternativní a velmi rychlý důkaz vztahu $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Protože tato rovnost platí pro reálná čísla a obě strany jsou holomorfní (jako funkce dvou komplexních proměnných), musí identita platit univerzálně.
- Vztah $e^z \cdot e^{-z} = 1$:** Opět, jelikož pro reálné x platí $e^x \cdot e^{-x} = 1$ a funkce na obou stranách jsou holomorfní na $\mathbb{C}$, věta o jednoznačnosti okamžitě zaručuje platnost tohoto vztahu pro libovolné komplexní z .

4 Řešené příklady

Příklad 1. Exponenciální rovnice $\exp(z) = 3 - 2i$ Hledáme komplexní číslo $z = x + iy$ takové, aby platilo $e^z = 3 - 2i$.

Krok 1: Rozpis levé strany

Podle vlastností komplexní exponenciály platí: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Krok 2: Přepis pravé strany do goniometrického tvaru

Určíme modul a argument čísla $w = 3 - 2i$:

- **Modul:** $|w| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
- **Argument:** Číslo leží ve IV. kvadrantu ($Re > 0, Im < 0$).

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{3}\right) \approx -0,588 \text{ rad}$$

Pravou stranu tedy zapíšeme jako: $3 - 2i = \sqrt{13}(\cos(-0,588) + i \sin(-0,588))$.

Krok 3: Porovnání a výpočet

Porovnáním modulů a argumentů (při započtení periody $2k\pi$) získáme:

1. $e^x = \sqrt{13} \implies x = \ln(\sqrt{13}) = \frac{1}{2} \ln(13) \approx 1,28$.
2. $y = -0,588 + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Výsledek:

$$z = \frac{1}{2} \ln 13 + i(-0,588 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Příklad 2. Goniometrická rovnice $\sin(z) = 6i$ Při řešení využijeme substituci na kvadratickou rovnici.

Krok 1: Dosazení definice a úprava

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 6i \implies e^{iz} - e^{-iz} = 12i^2 = -12$$

Zavedeme substituci $w = e^{iz}$ (tedy $e^{-iz} = 1/w$):

$$w - \frac{1}{w} = -12 \implies w^2 + 12w - 1 = 0$$

Krok 2: Výpočet kořenů w

Doplněním na čtverec: $(w + 6)^2 - 37 = 0 \implies w_{1,2} = -6 \pm \sqrt{37}$.

Krok 3: Návrat ze substitute ($e^{iz} = w$)

Víme, že $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

- **Pro $w_1 = \sqrt{37} - 6$:** (Kladné číslo, úhel $\arg(w) = 0$).

$$e^{-y} = \sqrt{37} - 6 \implies y_1 = -\ln(\sqrt{37} - 6), \quad x = 2k\pi$$

- **Pro $w_2 = -6 - \sqrt{37}$:** (Záporné číslo, úhel $\arg(w) = \pi$).

$$e^{-y} = 6 + \sqrt{37} \implies y_2 = -\ln(6 + \sqrt{37}), \quad x = \pi + 2k\pi$$

Výsledek:

$$z_1 = 2k\pi - i \ln(\sqrt{37} - 6)$$

$$z_2 = (2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{37} + 6)$$

5 Metodické poznámky k výpočtům

- **Určení kvadrantu:** Při výpočtu $\arctg(y/x)$ je vždy nutné ověřit polohu bodu v Gaussově rovině. Pro $x < 0$ přičítáme k výsledku z kalkulačky π .
- **Logaritmování záporných čísel:** V komplexním oboru se záporné číslo w interpretuje jako $|w| \cdot e^{i\pi}$. Proto se v řešení objevuje posun o π u imaginární části.
- **Perioda:** Nezapomínáme na $2k\pi$, protože komplexní exponenciála je periodická funkce s periodou $2\pi i$.

5.1 Význam pro studium

Díky této větě nemusíme při práci s $\sin z$, $\cos z$ nebo e^z neustále operovat s nekonečnými řadami nebo Cauchyovými součiny. Pokud narazíme na výraz, o kterém víme, že v reálném oboru funguje určitým způsobem, věta o jednoznačnosti nám dovoluje s ním v $\mathbb{C}$ pracovat stejně, pokud jsou dané funkce holomorfní (což námi definované celistvé funkce jsou).