

Komplexní čísla, izomorfismy a algebraické struktury

Učební text s řešenými úlohami a závěrečným testem

Úvod

Tento text provází sadou úloh zaměřených na algebraickou podstatu komplexních čísel. Ukážeme si, jak lze komplexní čísla reprezentovat pomocí dvojic reálných čísel nebo matic a jak tyto reprezentace souvisí s pojmy jako pole (těleso), izomorfismus a vektorový prostor.

1 Řešení základních úloh

Úloha 1: Existence inverzního prvku v $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$

Zadání: Máme strukturu definovanou na $\mathbb{R}^2$ operacemi:

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (a, b) &= (x + a, y + b) \\ (x, y) \otimes (a, b) &= (xa - yb, xb + ya)\end{aligned}$$

Naším úkolem je dokázat existenci inverzního prvku vzhledem k násobení, aniž bychom jej přímo vypočítali.

Řešení: Aby byla struktura tělesem, musí ke každému nenulovému prvku $(x, y) \neq (0, 0)$ existovat inverzní prvek (u, v) takový, že jejich součin je roven neutrálnímu prvku násobení. Neutrálním prvkem pro operaci $\otimes$ je zjevně $(1, 0)$, protože $(x, y) \otimes (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$.

Hledáme tedy (u, v) tak, aby platilo:

$$(x, y) \otimes (u, v) = (1, 0)$$

Rozepsáním podle definice operace $\otimes$ získáme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých u, v :

$$\begin{aligned}xu - yv &= 1 \\ yu + xv &= 0\end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz existence bez výpočtu: Z lineární algebry víme, že soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení, pokud je determinant matice soustavy nenulový.

$$D = \det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x \cdot x - (-y) \cdot y = x^2 + y^2$$

Jelikož předpokládáme, že prvek (x, y) je nenulový (tedy alespoň jedno z čísel x, y je různé od nuly), musí platit $x^2 + y^2 > 0$. Determinant je tedy nenulový ($D \neq 0$). To dokazuje, že řešení (u, v) **existuje a je jednoznačné**.

Úloha 2: Maticová reprezentace komplexních čísel

Zadání: Ukažte izomorfismus mezi $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ a strukturou matic $(M, +, \cdot)$, kde $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Ověřte axiomy tělesa pro M .

1. Důkaz izomorfismu Definujme zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ předpisem:

$$f((a, b)) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Pro izomorfismus musí platit zachování operací:

• **Sčítání:** $f((x, y) \oplus (a, b)) = f((x + a, y + b)) = \begin{pmatrix} x + a & -(y + b) \\ y + b & x + a \end{pmatrix}$.

Součet matic: $f((x, y)) + f((a, b)) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & -y - b \\ y + b & x + a \end{pmatrix}$.

Závěr: je splněno $f((x, y) \oplus (a, b)) = f((x, y)) + f((a, b))$

• **Násobení:** $f((x, y) \otimes (a, b)) = f((xa - yb, xb + ya)) = \begin{pmatrix} xa - yb & -(xb + ya) \\ xb + ya & xa - yb \end{pmatrix}$.

Součin matic: $f((x, y)) \cdot f((a, b)) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & -xb - ya \\ ya + xb & -yb + xa \end{pmatrix}$.

Závěr: je splněno $f((x, y) \otimes (a, b)) = f((x, y)) \cdot f((a, b))$

Zobrazení je bijekce, struktury jsou izomorfní.

2. Ověření axiomů tělesa pro $(M, +, \cdot)$ M je podokruhem matic 2×2 , takže asociativita a distributivita jsou splněny. Zbývá ověřit:

1. **Komutativita násobení:** Matice tvaru $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ spolu komutují. Můžeme se o tom přesvědčit výpočtem součinů

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2. **Jednotkový prvek:** Matice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$.

3. **Inverzní prvek:** Pro $A \in M, A \neq 0$ je $\det(A) = a^2 + b^2 > 0$. Inverzní matice je:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

což je opět prvek M .

Struktura $(M, +, \cdot)$ je tělesem.

Úloha 3: Lineární funkce a matice

Zadání: Ukažte izomorfismus mezi $M_1 = \{z \rightarrow az + b\}$ (skládání) a $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ (násobení).

Řešení: Přiřadíme $f(z) = az + b \leftrightarrow A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Skládání:** pro $f(z) = a_1z + b_1$, $g(z) = a_2z + b_2$ je $(f \circ g)(z) = a_1(a_2z + b_2) + b_1 = (a_1a_2)z + (a_1b_2 + b_1)$.

- **Násobení matic:**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Platí $A_f \cdot A_g = A_{f \circ g}$, zobrazení je tedy izomorfismus.

Úloha 4: Homomorfismus $GL(2, \mathbb{C})$ a Möbiovy transformace

Zadání: Ukažte homomorfismus grupy M_1 (regulární matice) do M_2 (lineárně lomené funkce $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$).

Řešení: Definujme zobrazení $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$, které matici M přiřadí funkci f_M

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Mějme dvě obecné matice $A, B \in M_1$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

1. Součin matic (levá strana rovnosti $\Psi(A \cdot B)$): Vypočítáme matici $C = A \cdot B$:

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

Obrazem matice C v zobrazení Ψ je funkce:

$$\Psi(C)(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} \quad (1)$$

2. Skládání funkcí (pravá strana rovnosti $\Psi(A) \circ \Psi(B)$): Máme dvě funkce odpovídající maticím A a B :

$$f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f_B(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Vypočítáme složené zobrazení $(f_A \circ f_B)(z) = f_A(f_B(z))$:

$$\begin{aligned} (f_A \circ f_B)(z) &= \frac{a \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + b}{c \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + d} \\ &= \frac{a(\alpha z + \beta) + b(\gamma z + \delta)}{c(\alpha z + \beta) + d(\gamma z + \delta)} \\ &= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} \end{aligned}$$

Výrazy jsou totožné, zobrazení je homomorfismem.

Úloha 5: Jádru homomorfismu a faktorgrupa

1. Jádru ($\text{Ker } \Psi$) Hledáme matice, které se zobrazí na identitu $id(z) = z$.

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \implies az + b = cz^2 + dz \implies cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

Aby rovnost platila pro všechna z , musí být $c = 0, b = 0, a = d$.

$$\text{Ker } \Psi = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} : k \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} = \{k \cdot I\}$$

2. Faktorgrupa Podle 1. věty o izomorfismu:

$$GL(2, \mathbb{C}) / \{kI\} \cong PGL(2, \mathbb{C})$$

Faktorgrupou je projektivní obecná lineární grupa.

Úloha 6: Komplexní čísla jako vektorový prostor

Zadání: Ukažte, že $\mathbb{C}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, určete dimenzi a bázi.

Řešení:

- (i) Každé $z \in \mathbb{C}$ lze psát jako $z = x \cdot 1 + y \cdot i$.
- (ii) Prvky $\{1, i\}$ jsou lineárně nezávislé nad $\mathbb{R}$, protože $x \cdot 1 + y \cdot i = 0$ právě když je $x = y = 0$.
- (iii) Z (i), (ii) plyne, že $\{1, i\}$ tvoří bázi vektorového prostoru.
- (iv) Z (iii) plyne, že dimenze je $d = 2$.
- (v) Zobrazení $L(x + iy) = (x, y)$ je bijekce. Ukážeme, že L je lineární. Označme $z = x + iy$, $w = u + iv$. Upravíme $L(z + w)$

$$\begin{aligned} L(z + w) &= L(x + iy + u + iv) = L(x + u + i(y + v)) = (x + u, y + v) = \\ &= (x, y) + (u, v) = L(x + iy) + L(u + iv) \\ &= L(z) + L(w) \end{aligned}$$

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ upravíme

$$\begin{aligned} L(\alpha z) &= L(\alpha(x + iy)) = L(\alpha x + i\alpha y) = (\alpha x, \alpha y) = \alpha(x, y) = \\ &= \alpha L(z) \end{aligned}$$

- (vi) Z (v) plyne, že prostory $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ jsou izomorfní.

2 Aplikace a hlubší souvislosti

V této části se podíváme na to, jak nám maticová reprezentace pomáhá pochopit geometrický význam násobení komplexních čísel.

Úloha 7: Geometrický význam násobení imaginární jednotkou

Zadání: Uvažujme vektor $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, který odpovídá komplexnímu číslu $z = x + iy$.

1. Napište matici J , která v našem izomorfismu odpovídá imaginární jednotce i (tj. číslu $0 + 1i$).
2. Vynásobte matici J vektorem $\vec{v}$ (chápaným jako sloupcový vektor).
3. Geometricky interpretujte výsledek.

Řešení: 1. Číslu $0 + 1i$ odpovídá matice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Násobení:

$$J \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x - 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

3. Výsledkem je vektor $(-y, x)$. V Gaussově rovině to znamená, že původní vektor se otočil o 90° ($\frac{\pi}{2}$) v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). **Násobení číslem i je tedy rotace o 90° .**

Úloha 8: Determinant a absolutní hodnota

Zadání: Dokažte pomocí determinantů větu o absolutní hodnotě součinu: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Řešení: Absolutní hodnota (modul) čísla $z = a + bi$ je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Determinant matice A odpovídající číslu z je $\det(A) = a^2 + b^2$. Platí tedy $\det(A) = |z|^2$.

Z Cauchyovy věty o determinantech víme, že $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Dosazením získáme:

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Odmocněním obou stran dostáváme požadované tvrzení $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Úloha 9: Mocnina jako rotace a stejnolehlost

Zadání: Mějme komplexní číslo $z = 1 + i$. Vypočítejte z^4 pomocí maticového násobení a ověřte geometricky.

Řešení: Číslu $z = 1 + i$ odpovídá matice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Výsledek odpovídá číslu -4 . *Geometricky:* Číslo $1 + i$ má úhel 45° . Jeho čtvrtá mocnina musí mít úhel $4 \times 45^\circ = 180^\circ$, což odpovídá záporné reálné poloose. Modul (absolutní hodnota) čísla $1 + i$ je $|1 + i| = \sqrt{2}$, a tedy $|1 + i|^4 = \sqrt{2}^4 = 4$ a to odpovídá $|-4|$.

Úloha 10: Komplexně sdružené číslo a inverze

Zadání: Dokažte, že pro z na jednotkové kružnici ($|z| = 1$) platí $z^{-1} = \bar{z}$.

Řešení: Nechť matice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ odpovídá číslu z . Podmínka $|z| = 1$ znamená $\det(A) = a^2 + b^2 = 1$. Inverzní matice je obecně $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Protože $\det(A) = 1$, je $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, což je transponovaná matice A^T . Tato matice odpovídá číslu $a - bi$, tedy $\bar{z}$.

3 Shrnující závěr

V předchozích úlohách jsme zkoumali hlubší algebraickou podstatu komplexních čísel. Pro budoucí učitele matematiky jsou klíčové následující závěry:

1. Komplexní čísla nejsou „imaginární“

Ukázali jsme, že těleso $\mathbb{C}$ je izomorfní s reálnými maticemi $M \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

$$a + bi \cong \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Matice pro i je $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, kde $J^2 = -I$.

2. Spojitost mezi algebrou a geometrií

Násobení matic odpovídá skládání zobrazení. Grupa regulárních matic $GL(2, \mathbb{C})$ se homomorfne zobrazuje na grupu Möbiových transformací, což vede k projektivní geometrii.

4 Ověřovací test porozumění

1. Maticová reprezentace: Pokud komplexnímu číslu $z = a + bi$ odpovídá matice A , jaká matice odpovídá $\bar{z}$?

- (a) A^T (transponovaná)
- (b) A^{-1} (inverzní)
- (c) $-A$ (opačná)

2. Struktura tělesa: Proč množina všech matic typu 2×2 netvoří těleso?

- (a) Sčítání není komutativní.
- (b) Existují dělitele nuly.
- (c) Nemají jednotkový prvek.

3. Homomorfismus: Na jakou funkci se zobrazí matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ v zobrazení Ψ ?

- (a) $f(z) = 2z$
- (b) $f(z) = 1$
- (c) $f(z) = z$ (identita)

4. Geometrie: Co geometricky znamená vynásobení komplexního čísla z číslem i ?

- (a) Posunutí o 1.
- (b) Otočení o 90° .
- (c) Zvětšení $2\times$.

Řešení testu

1. (a) Matice pro $\bar{z}$ je transponovaná. **2. (b)** Obecné matice mají dělitele nuly. **3. (c)** Matice je skalární násobek identity, v projektivní grupě odpovídá identitě. **4. (b)** Rotace o 90° .