

Řešené úlohy z komplexních čísel

Operace, rovnice a geometrická zobrazení

1 Algebraické rovnice

Úloha 1

Zadání: Vypočtěte kořeny rovnice $(z + 2)^3 = -i$.

Řešení: Nejprve vyjádříme pravou stranu v goniometrickém tvaru. Číslo $-i$ leží na záporné části imaginární osy, má modul 1 a argument 270° ($\frac{3\pi}{2}$).

$$-i = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

Rovnici přepíšeme jako $(z + 2) = \sqrt[3]{-i}$. V oboru komplexních čísel existují 3 třetí odmocniny. Označme $w = z + 2$. Kořeny w_k ($k = 0, 1, 2$) vypočteme pomocí Moivreovy věty:

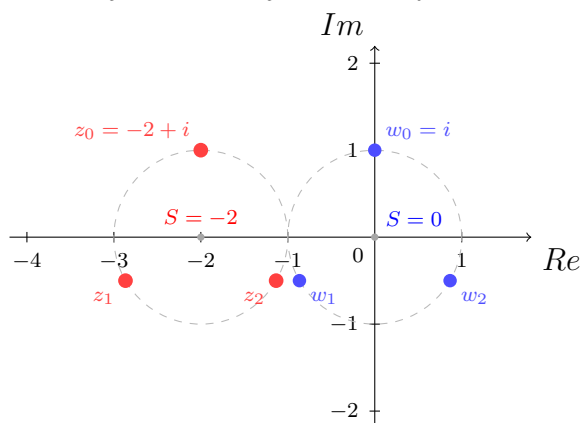
$$w_k = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$$

- Pro $k = 0$: Argument je $\frac{\pi}{2}$. $w_0 = i$.
- Pro $k = 1$: Argument je $\frac{7\pi}{6}$. $w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
- Pro $k = 2$: Argument je $\frac{11\pi}{6}$. $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Výsledné kořeny z získáme odečtením 2 (posunutí v rovině):

$$z_0 = -2 + i, \quad z_1 = -2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Na obrázku jsou v Gaussově rovině vyznačeny pomocné kořeny w_0, w_1, w_2 a kořeny z_0, z_1, z_2 . Obě trojice kořenů jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.



Úloha 2

Zadání: Řešte rovnici $z^2 + iz + 2 = 0$.

Řešení: Jedná se o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty. Diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = i^2 - 4(1)(2) = -1 - 8 = -9$$

Odmocnina z diskriminantu $\sqrt{D} = \pm 3i$. Dosadíme do vzorce pro kořeny:

$$z_{1,2} = \frac{-i \pm 3i}{2} \implies z_1 = \frac{2i}{2} = i, \quad z_2 = \frac{-4i}{2} = -2i.$$

Úloha 3

Zadání: Řešte rovnici $(z - 1)^4 = -16$.

Řešení: Převádíme -16 na goniometrický tvar: $16(\cos \pi + i \sin \pi)$. Substituce $w = z - 1$. Hledáme $w = \sqrt[4]{-16}$. Modul odmocniny je 2. Argumenty se liší o 90° : $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Kořeny w_k :

$$w_0 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$w_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$w_2 = 2(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$w_3 = 2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Výsledné kořeny z (přičteme 1 k w_k):

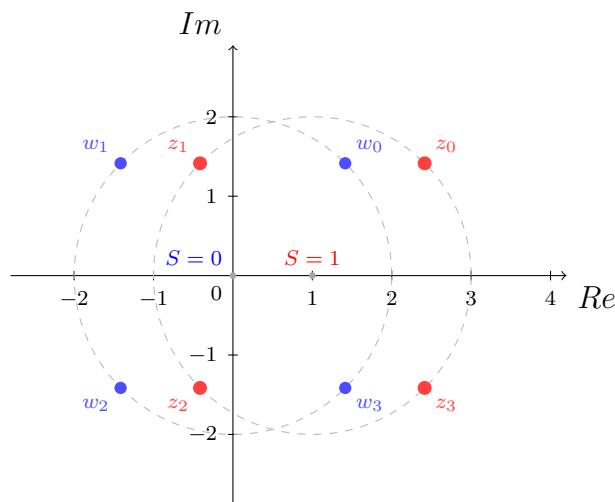
$$z_0 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Na obrázku jsou v Gaussově rovině vyznačeny pomocné kořeny w_0, w_1, w_2, w_3 a kořeny z_0, z_1, z_2, z_3 . Obě čtverice kořenů jsou vrcholy čtverce.



2 Konstrukční úlohy

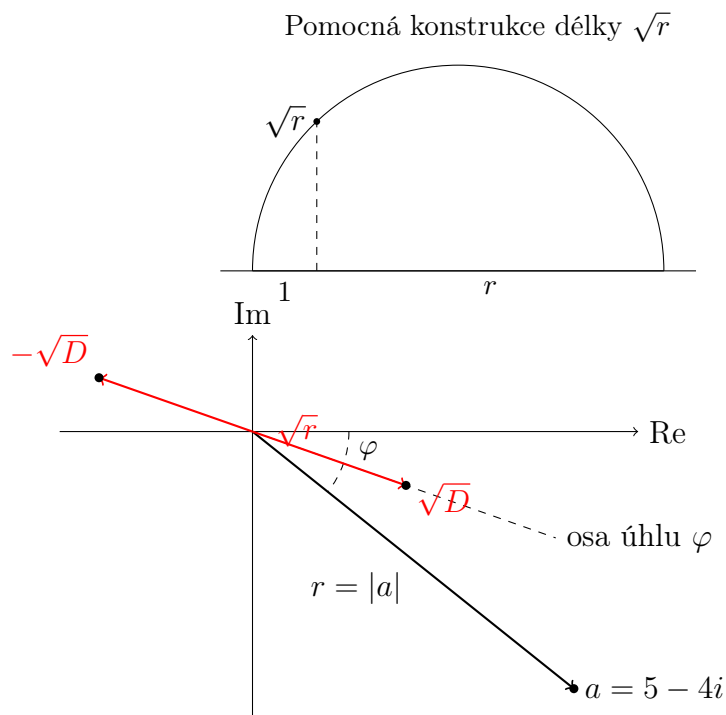
Úloha 4 (Konstrukce odmocniny a kořenů)

Zadání: $z^2 + (1 - 2i)z - 2 = 0$. Diskriminant $D = 5 - 4i$.

Pro vyřešení rovnice $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$ potřebujeme nejprve sestrojit $\sqrt{D}$ a poté zkonstruovat výsledné kořeny.

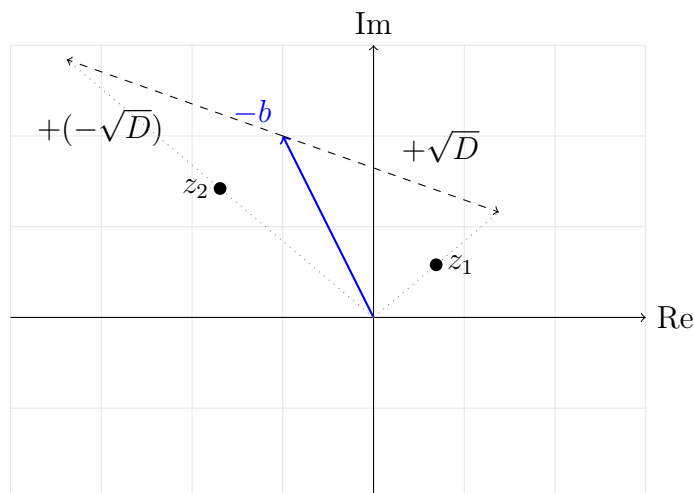
1. Fáze: Konstrukce $\sqrt{D}$ a $-\sqrt{D}$ (kde $D = a$) Hledáme číslo w , pro které $w^2 = a$, kde $a = 5 - 4i$.

1. Sestrojíme bod $a = [5, -4]$ a jeho modul $r = |a| = \sqrt{41}$.
2. Pomocí Euklidovy věty o výšce sestrojíme délku $\sqrt{r}$.
3. Sestrojíme osu úhlu φ , který svírá průvodič bodu a s kladnou reálnou osou.
4. Na osu naneseleme délku $\sqrt{r}$. Získaný bod je $\sqrt{D}$.
5. Bod $-\sqrt{D}$ sestrojíme jako bod středově souměrný k $\sqrt{D}$ podle počátku.



2. Fáze: Konstrukce kořenů z_1, z_2 Víme, že $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, kde $-b = -(1 - 2i) = -1 + 2i$.

1. Sestrojíme vektor $-b = [-1, 2]$.
2. K bodu $-b$ přičteme vektor $\sqrt{D}$. Získáme bod S_1 (čitatel prvního kořene).
3. K bodu $-b$ přičteme vektor $-\sqrt{D}$ (zkonstruovaný v předchozím kroku). Získáme bod S_2 (čitatel druhého kořene).
4. Kořeny z_1, z_2 získáme jako středy úseček spojujících počátek O s body S_1 a S_2 (geometrická interpretace dělení dvěma).



Úloha 5 (Geometrie podílu)

Zadání: Zobrazit $z = z_1/(z_1 + z_2)$ pro $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$. Vypočtěte hodnotu z a výsledek porovnejte s konstrukcí.

Algebraický výpočet: Nejprve vypočteme součet ve jmenovateli:

$$s = z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (-3 + 2i) = -2 + 4i$$

Nyní provedeme dělení:

$$z = \frac{z_1}{s} = \frac{1 + 2i}{-2 + 4i} = \frac{1 + 2i}{2(-1 + 2i)}$$

Zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým k závorce (tj. $-1 - 2i$):

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 2i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 - 2i - 2i - 4i^2}{1 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 - 4i + 4}{5} = \frac{3 - 4i}{10} = 0,3 - 0,4i$$

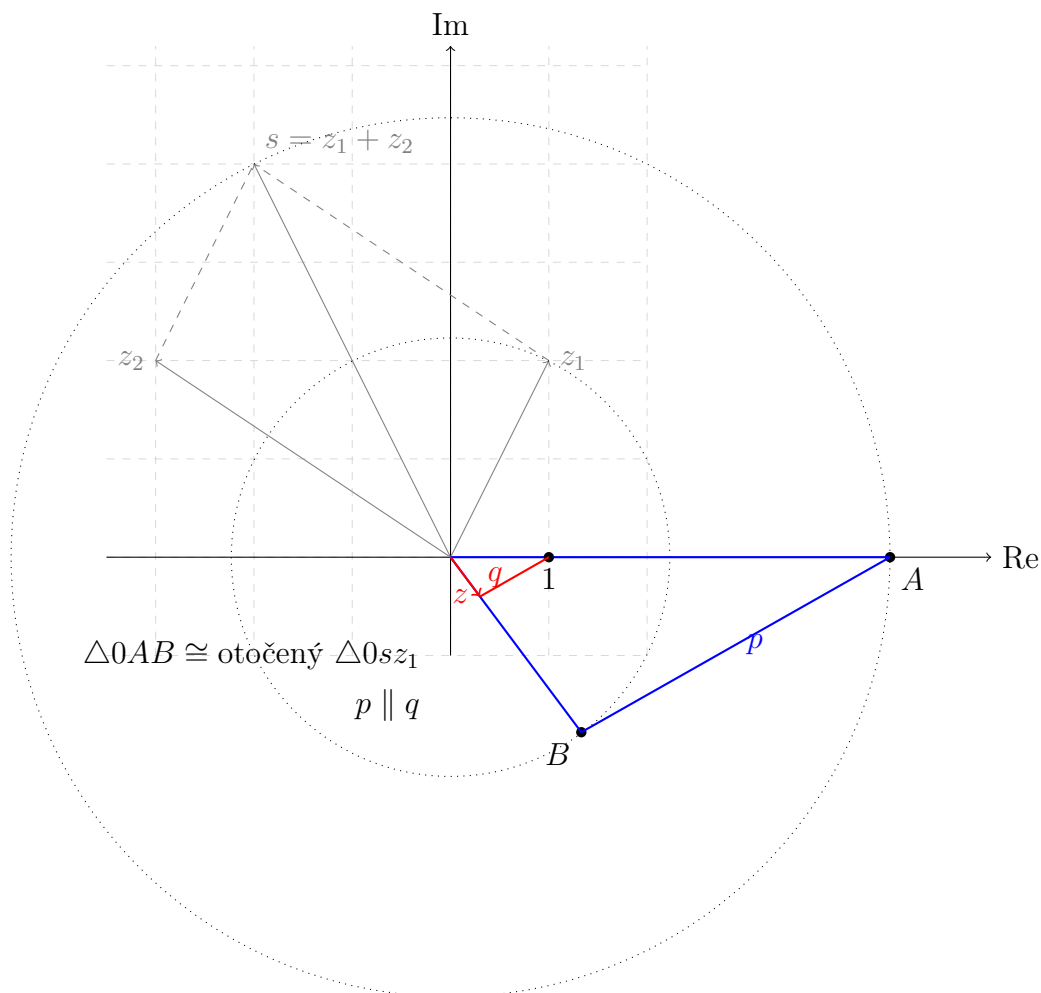
Výsledek $z = 0,3 - 0,4i$ leží ve čtvrtém kvadrantu, což odpovídá grafické konstrukci níže.

Vysvětlení a postup konstrukce: Označme $s = z_1 + z_2$. Hledáme $z = \frac{z_1}{s}$, což odpovídá úměře $z : 1 = z_1 : s$. Konstrukci provedeme pomocí pravítka a kružítka využitím podobnosti trojúhelníků.

Postup konstrukce pomocí pravítka a kružítka:

- Konstrukce součtu s :** Bod s sestrojíme jako součet vektorů z_1 a z_2 (doplněním na rovnoběžník).
- Otočení trojúhelníku:** Sestrojíme trojúhelník $0AB$ shodný s trojúhelníkem $0sz_1$, ale otočený kolem bodu 0 tak, aby vrchol s ležel na kladné reálné ose.
 - Sestrojíme kružnici k_1 se středem v 0 a poloměrem $|s|$. Její průsečík s kladnou reálnou osou označíme A .
 - Sestrojíme kružnici k_2 se středem v 0 a poloměrem $|z_1|$.
 - Do kružítka vezmeme vzdálenost $|sz_1|$. Z bodu A uděláme oblouk, který protne k_2 v bodě B (ve směru odpovídajícím orientaci sz_1).
 - Trojúhelník $0AB$ je nyní otočeným obrazem trojúhelníku $0sz_1$.
- Konstrukce podobného trojúhelníku (rovnoběžky):** Hledáme bod z tak, aby $\triangle 01z \sim \triangle 0AB$.

- Na reálné ose vyznačíme bod 1.
- Vedeme přímkou p body A a B .
- Bodem 1 vedeme přímkou q rovnoběžnou s p .
- Průsečík přímky q s polopřímkou $0B$ je hledaný obraz podílu z .



3 Geometrická zobrazení a výpočty

Úloha 6: Výpočet úhlu z poměru bodů

Zadání: Vypočítejte velikost úhlu $\sphericalangle z_2 z_1 z_3$ pro $z_1 = 1, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 + 2i$.

Vysvětlení: Velikost orientovaného úhlu, který svírají dva vektory vycházející z jednoho bodu, odpovídá argumentu jejich podílu. Vektor $\vec{u} = z_2 - z_1$ směřuje do bodu z_2 . Vektor $\vec{v} = z_3 - z_1$ směřuje do bodu z_3 . Chceme-li úhel od $\vec{u}$ k $\vec{v}$, počítáme argument čísla:

$$\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

Výpočet:

$$\lambda = \frac{(1 + 2i) - 1}{(2 - i) - 1} = \frac{2i}{1 - i}$$

Rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli $(1 + i)$:

$$\lambda = \frac{2i(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{2i - 2}{2} = -1 + i$$

Nyní hledáme argument čísla $-1 + i$. Toto číslo leží ve 2. kvadrantu.

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tomu odpovídá úhel $\alpha = 135^\circ \left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Úloha 7: Určení typu zobrazení

Zadání: Zobrazení zobrazuje $z_1 = 2 \rightarrow w_1 = 2 + 2i$ a $z_2 = -1 + i \rightarrow w_2 = 3i$. O jaké zobrazení jde?

Vysvětlení: V rovině komplexních čísel jsou tzv. přímé podobnosti vyjádřeny lineární funkcí $f(z) = az + b$.

- Koeficient a určuje otočení a změnu měřítka.
- Pokud $|a| = 1$, jde o shodnost (otočení + posunutí).
- Pokud $|a| \neq 1$, jde o podobnost s koeficientem $k = |a|$.
- Argument a určuje úhel otočení.

Výpočet: Hledáme a ze směrnice vektorů:

$$a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} = \frac{(2 + 2i) - 3i}{2 - (-1 + i)} = \frac{2 - i}{3 - i} = \frac{7 - i}{10} = 0,7 - 0,1i$$

Modul koeficientu a :

$$|a| = \sqrt{0,7^2 + (-0,1)^2} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Protože $|a| \neq 1$, jedná se o **podobnost**. Koeficient podobnosti je $k = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$. Zobrazení zmenšuje a otáčí.

Úloha 8: Otočení (rotace) a kontrola

Zadání: Napište rovnici otočení se středem $s = 2 - 3i$ o úhel 90° . Výsledek zkontrolujte výpočtem invariantního bodu z_0 zobrazení. Dále zvolte bod $z_1 \neq z_0$, vypočtěte jeho obraz w_1 a vypočtěte poměr $(w_1 - z_0)/(z_1 - z_0)$ a porovnejte s hodnotou, která plyne ze zadání.

Vysvětlení: Otočení bodu z kolem středu s o úhel α lze zapsat vztahem:

$$w - s = (z - s) \cdot e^{i\alpha}$$

Pro $\alpha = 90^\circ$ je otočný faktor $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Výpočet rovnice:

$$w - (2 - 3i) = (z - (2 - 3i)) \cdot i$$

$$w = i(z - 2 + 3i) + 2 - 3i$$

$$w = iz - 2i + 3i^2 + 2 - 3i = iz - 2i - 3 + 2 - 3i$$

$$w = iz - 1 - 5i$$

Kontrola invariantním bodem z_0 : Invariantní bod se zobrazí sám na sebe ($w = z$). Řešíme rovnici:

$$z_0 = iz_0 - 1 - 5i$$

$$z_0 - iz_0 = -1 - 5i$$

$$z_0(1 - i) = -1 - 5i$$

$$z_0 = \frac{-1 - 5i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{-1 - i - 5i - 5i^2}{1 - i^2} = \frac{-1 - 6i + 5}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

Vypočtený invariantní bod $z_0 = 2 - 3i$ je totožný se zadaným středem otočení s , což je správně.

Kontrola podílem pro zvolený bod: Zvolme například bod $z_1 = 1$. Vypočteme jeho obraz w_1 :

$$w_1 = i(1) - 1 - 5i = -1 - 4i$$

Vypočteme poměr $\frac{w_1 - z_0}{z_1 - z_0}$:

$$\frac{(-1 - 4i) - (2 - 3i)}{1 - (2 - 3i)} = \frac{-3 - i}{-1 + 3i}$$

Zlomek rozšíříme komplexně sdruženým jmenovatelem $(-1 - 3i)$:

$$\frac{(-3 - i)(-1 - 3i)}{(-1 + 3i)(-1 - 3i)} = \frac{3 + 9i + i + 3i^2}{1 + 9} = \frac{3 + 10i - 3}{10} = \frac{10i}{10} = i$$

Výsledek i odpovídá komplexní jednotce s argumentem 90° ($e^{i\frac{\pi}{2}}$), což přesně odpovídá zadání otočení o 90° .