

Písenná část zkoušky z předmětu UKP

18. listopadu 2025

- Skutečná písemná práce bude obsahovat 4 příklady.
- Pečlivě čtete zadání. Vypočtete a zobrazte je něco jiného než zobrazte (v tom případě máte v průběhu výpočtu odmocňovat „nehezke číslo“ a není nutné počítat jeho argument, stačí výsledek sestojit).
- Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a dále vlastnoručně psaný tahák formátu jedné strany a4. Tahák odevzdáte spolu s písemkou.
- Svoje výpočty řádně zdůvodňujte.
- List se zadáním použijte při písemce jako obálku a podepište jej.
- Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 75%.
- Úlohy označené hvězdičkou **nepatří** mezi základní úlohy. V písemce bude k některým úlohám i hvězdičková varianta a pokud ji vyřešíte, bude se vám počítat jako jeden a půl příkladu.

1. Matematické struktury

- 1a Matematická struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, která má operace definované vztahy (1), (2) je tělesem. Vaším úkolem je ukázat, že splňuje axiom inverzního prvku, aniž byste tento prvek spočítali.

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x + a, y + b) \quad (1)$$

$$(x, y) \otimes (a, b) = (xa - yb, xb + ya) \quad (2)$$

- 1b Ukažte, že matematická struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, která má operace definované vztahy (3), (4) je isomorfní se strukturou $(M, +, \cdot)$, kde M je množina matic daná vztahem (5) a $+$, $\cdot$ jsou operace sčítání a násobení matic.

Víme, že struktura $(M, +, \cdot)$ je podokruh struktury všech matic 2×2 . Které axiomy je třeba ověřit, abychom ukázali, že je $(M, +, \cdot)$ tělesem? Ověřte tyto axiomy.

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x + a, y + b) \quad (3)$$

$$(x, y) \otimes (a, b) = (xa - yb, xb + ya) \quad (4)$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (5)$$

- 1c Ukažte, že struktura $(M_1, \odot)$, kde M_1 je množina lineárních funkcí komplexní proměnné formálně zadaná vztahem (6) a $\odot$ je operace skládání funkcí, je izomorfní se strukturou $(M_2, \cdot)$, kde M_2 je množina matic zadaná vztahem (7) a $\cdot$ je operace násobení matic.

$$M_1 = \{z \rightarrow az + b, z \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} \quad (6)$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\} \quad (7)$$

- 1d* Ukažte, že grupa $(M_1, \cdot)$, kde M_1 je množina regulárních komplexních matic řádu 2, formálně zadaná vztahem (8), a $\cdot$ je operace násobení matic, je homomorfní s grupou $(M_2, \odot)$, kde M_2 je množina lineárně lomených funkcí komplexní proměnné formálně zadaná vztahem (8) a $\odot$ je operace skládání funkcí.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \quad (8)$$

$$M_2 = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, z \in \mathbb{S} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \quad (9)$$

- 1e* Určete jádro homomorfismu z předchozí úlohy a faktorgrupu grupy $(M_1, \cdot)$, která je izomorfní s grupou $(M_2, \odot)$.

1f Ukažte, že množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ spolu s operací sčítání a násobení prvků $\mathbb{C}$ reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Ukažte, že dimenze prostoru je $d = 2$ a že $i, 1$ tvoří bázi tohoto prostoru.

Dále ukažte, že tento vektorový prostor je izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ (nad tělesem $\mathbb{R}$) a sestrojte izomorfismus.

2. Vlastnosti operací s komplexními čísly.

2a Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

2b Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$ platí $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.

2c Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

2d Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

2e Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$ platí $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

2f Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2g Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

3. Geometrický význam operací s komplexními čísly

3a Vypočtěte kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

(a) $(z + 2)^3 = -i$

(b) $z^2 + iz + 2 = 0$

3b (a) $(z - 1)^4 = -16$

(b) $z^2 - 3iz - 2 = 0$

3c Zobrazte v komplexní rovině kořeny rovnice. Při zobrazení použijte pravítko případně i kružítko.

$$z^2 + (1 - 2i)z - 2 = 0$$

3d

$$z^2 + iz - 2 + i = 0$$

3e Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + 3i$. Poté zkonstruuje obraz jejich podílu a porovnejte jeho polohu s vypočtenou hodnotou.

3f Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -3 + 2i$ a číslo $z = z_1/(z_1 + z_2)$. Číslo z zobrazte dvěma způsoby: konstrukcí z obrazů čísel z_1, z_2 a výpočtem. Oba výsledky porovnejte.

4. Poměr bodů, lineární funkce, podobná zobrazení v komplexní rovině.

4a Vypočtěte poměr bodů $z_1 = 1, z_2 = 2 - i, z_3 = 1 + 2i$ a z tohoto poměru vypočtěte velikost úhlu s vrcholem v bodě z_1 a s rameny procházejícími body z_2, z_3 . Body poté zobrazte v komplexní rovině a vypočtený úhel porovnejte s obrázkem.

4b Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $z_1 = 2$ na bod $w_1 = 2 + 2i$ a bod $z_2 = -1 + i$ na bod $w_2 = 3i$. Vypočtěte koeficient tohoto podobného zobrazení.

Typem podobného zobrazení myslíme posunutí, otočení, stejnoolehlost případně stejnoolehlost složenou s otočením.

4c $z_1 = i, w_1 = -1, z_2 = 2, w_2 = 2 + i$

4d $z_1 = 1, w_1 = -1 - 4i, z_2 = i, w_2 = -2 - 5i$

4e Napište lineární funkci, která v Gaussově rovině popisuje otočení se středem v bodě $s = 2 - 3i$ o úhel 90° v kladném směru.

Výsledek zkontrolujte výpočtem invariantního bodu z_0 zobrazení. Dále zvolte bod $z_1 \neq z_0$, vypočtěte jeho obraz w_1 a vypočtěte poměr $(w_1 - z_0)/(z_1 - z_0)$ a porovnejte s hodnotou, která plyne ze zadání.

5. Ověření, zda je funkce komplexní proměnné diferencovatelná.

5a Ověřte, zda funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$f(z) = \exp(z^2)$$

5b

$$f(z) = z \exp(z)$$

5c

$$f(z) = \bar{z} \exp(z)$$

5d

$$f(z) = z \exp(\bar{z})$$

5e

$$f(z) = \sin(z)$$

6. Exponenciální a goniometrické rovnice v komplexním oboru.

6a Vypočtěte kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v komplexní rovině.

$$\sin(z) = 3$$

6b

$$\sin(z) = 3i$$

6c

$$\cos(z) = 2i$$

6d

$$\cos(z) = 2$$

6e

$$\exp(2iz - 1) = 4$$

6f

$$\exp(3 - iz) = 1 - i$$