

Úlohy do písemné části zkoušky z předmětu PUKP/KUPK

30. října 2025

Zde je jeden typ úloh. Typů bude zhruba šest. Písemka bude obsahovat celkem čtyři úlohy, přitom od každého typu nejvýše jednu.

1. Matematické struktury

- 1a Matematická struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, která má operace definované vztahy (1), (2) je tělesem. Vaším úkolem je ukázat, že splňuje axiom inverzního prvku, aniž byste tento prvek spočítali.

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x + a, y + b) \quad (1)$$

$$(x, y) \otimes (a, b) = (xa - yb, xb + ya) \quad (2)$$

- 1b Ukažte, že matematická struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, která má operace definované vztahy (3), (4) je isomorfní se strukturou $(M, +, \cdot)$, kde M je množina matic daná vztahem (5) a $+$, $\cdot$ jsou operace sčítání a násobení matic.

Víme, že struktura $(M, +, \cdot)$ je podokruh struktury všech matic 2×2 . Které axiomy je třeba ověřit, abychom ukázali, že je $(M, +, \cdot)$ tělesem? Ověřte tyto axiomy.

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x + a, y + b) \quad (3)$$

$$(x, y) \otimes (a, b) = (xa - yb, xb + ya) \quad (4)$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (5)$$

- 1c Ukažte, že struktura $(M_1, \odot)$, kde M_1 je množina lineárních funkcí komplexní proměnné formálně zadaná vztahem (6) a $\odot$ je operace skládání funkcí, je izomorfní se strukturou $(M_2, \cdot)$, kde M_2 je množina matic zadaná vztahem (7) a $\cdot$ je operace násobení matic.

$$M_1 = \{z \rightarrow az + b, z \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} \quad (6)$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\} \quad (7)$$

- 1d Ukažte, že grupa $(M_1, \cdot)$, kde M_1 je množina regulárních komplexních matic řádu 2, formálně zadaná vztahem (8), a $\cdot$ je operace násobení matic, je homomorfní s grupou $(M_2, \odot)$, kde M_2^1 je množina lineárně lomených funkcí komplexní proměnné formálně zadaná vztahem (8) a $\odot$ je operace skládání funkcí.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \quad (8)$$

$$M_2 = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, z \in \mathbb{S} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \quad (9)$$

- 1e* Určete jádro homomorfismu z předchozí úlohy a faktorgrupu grupy $(M_1, \cdot)$, která je izomorfní s grupou $(M_2, \odot)$.

- 1f Ukažte, že množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ spolu s operací sčítání a násobení prvku $\mathbb{C}$ reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Ukažte, že dimenze prostoru je $d = 2$ a že $i, 1$ tvoří bázi tohoto prostoru.

Dále ukažte, že tento vektorový prostor je izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ (nad tělesem $\mathbb{R}$) a sestrojte izomorfismus.

¹ $\mathbb{S}$ označuje Gaussovu komplexní rovinu rozšířenou o nekonečno: $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Zobrazení v množině M_2 přiřazuje nekonečnu hodnotu a/b a číslu $-d/c$ přiřazuje nekonečno.