

Komplexní čísla jako struktura izometricky izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$

1 Od vektorů ke komplexní rovině

Protože se komplexní čísla mohou zdát na první pohled příliš abstraktní, podíváme se na ně v tomto kurzu z jiného úhlu. Namísto abychom si hned představovali špatně vizualizovatelná komplexní čísla, využijeme něco, co už dobře známe: **dvourozměrný vektorový prostor** $\mathbb{R}^2$.

1.1 Ztotožnění vektoru s komplexním číslem

Naším základem bude myšlenka, že komplexní číslo je bod v rovině, který jen zapisujeme jiným způsobem. Budeme budovat strukturu, která je **izometricky izomorfní** s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$.

Vezměme libovolný vektor $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Tento vektor nahradíme novým zápisem:

$$z = x + iy$$

Množinu všech těchto prvků budeme označovat písmenem $\mathbb{C}$.

Terminologie

- **Izomorfní:** Znamená to, že mezi vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ a množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$ existuje lineární bijektivní zobrazení (izomorfismus). Struktura obou prostorů je z hlediska lineární algebry identická, což znamená, že operace sčítání a násobení skalárem se přenášejí bez ekvivalentní změny jejich vlastností.
- **Izometrický:** Tento termín říká, že se v obou prostorech zachovávají vzdálenosti. Euklidovská vzdálenost dvou bodů v rovině $\mathbb{R}^2$ je přesně rovna absolutní hodnotě rozdílu (vzdálenosti) dvou odpovídajících komplexních čísel $|z_1 - z_2|$.

1.2 Definice operací

Abychom mohli komplexní čísla ($\mathbb{C}$) považovat za vektorový prostor, musíme definovat dvě základní operace tak, aby zobrazení $[x, y] \leftrightarrow x + iy$ bylo izomorfismem. To znamená, že operace v $\mathbb{C}$ musí odpovídat operacím v $\mathbb{R}^2$.

1. **Součet dvou komplexních čísel:** Mějme $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$. Jejich součet definujeme po složkách:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. **Násobek komplexního čísla reálným číslem (skalárem):** Mějme $z = x + iy$ a reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:

$$\alpha \cdot (x + iy) = (\alpha x) + i(\alpha y)$$

1.3 Axiomy vektorového prostoru v $\mathbb{C}$

Na základě výše uvedených definic splňuje množina $\mathbb{C}$ všech osm axiomů vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Pro připomenutí je vyjádřeme pro komplexní čísla. Pro libovolná komplexní čísla u, v, w (tj. $u, v, w \in \mathbb{C}$) a reálná čísla α, β (tj. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) platí:

- Asociativita sčítání: $(u + v) + w = u + (v + w)$
- Komutativita sčítání: $u + v = v + u$
- Existence nulového prvku: Existuje prvek $0 = 0 + i0$ takový, že $u + 0 = u$.
- Existence opačného prvku: Ke každému $u = x + iy$ existuje $-u = (-x) + i(-y)$ tak, že $u + (-u) = 0$.
- Distributivita skaláru: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- Distributivita součtu skalárů: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- Asociativita násobení skaláry: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- Existence jednotkového skaláru: $1 \cdot u = u$

1.4 Absolutní hodnota jako euklidovská norma

Aby bylo možné v komplexních číslech měřit **vzdálenosti**, definujeme absolutní hodnotu komplexního čísla $z = x + iy$. Chceme, aby tato hodnota přesně odpovídala euklidovské

normě (délce) vektoru v $\mathbb{R}^2$ (izomorfismus).

Pro $z = x + iy$ definujeme **absolutní hodnotu (normu)** jako:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Axiomy normy v komplexních číslech

Vzhledem k tomu, že absolutní hodnota v $\mathbb{C}$ odpovídá normě ve vektorovém prostoru, musí pro libovolná $z, w \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňovat tyto vztahy:

1. **Nezápornost:** $|z| \geq 0$, přičemž $|z| = 0$ právě tehdy, když $z = 0$.
2. **Homogenita:** $|\alpha \cdot z| = |\alpha| \cdot |z|$.
3. **Trojúhelníková nerovnost:** $|z + w| \leq |z| + |w|$.

2 Využití izomorfismu v geometrických výpočtech

Vzhledem k tomu, že komplexní čísla považujeme za body v rovině, můžeme snadno počítat geometrické úlohy pomocí algebraických operací. Řešením je právě převod geometrické vzdálenosti na algebraickou operaci s absolutní hodnotou.

Vzdálenost dvou bodů (délka úsečky): Vzdálenost mezi dvěma body z_1 a z_2 v komplexní rovině je dána jako absolutní hodnota jejich rozdílu:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Poměr délek stran trojúhelníku: Pokud máme trojúhelník s vrcholy A, B, C reprezentovanými čísly z_A, z_B, z_C , vycházíme při určení poměru jeho stran přímo z výše definovaného výpočtu délky úsečky. Například poměr délek stran AB a AC získáme takto:

$$\text{poměr} = \frac{\text{délka úsečky } AB}{\text{délka úsečky } AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|}$$

2.1 Definice okolí bodu

Na základě definované absolutní hodnoty můžeme zavést okolí bodu z_0 .

ϵ -ové okolí bodu z_0 (označujeme $U(z_0, \epsilon)$) je množina všech komplexních čísel z , jejichž vzdálenost od z_0 je menší než poloměr $\epsilon > 0$:

$$U(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

Geometricky toto okolí představuje vnitřek otevřeného kruhu se středem v bodě z_0 a poloměrem ϵ .

3 Násobení komplexních čísel

Dosud jsme na komplexní čísla nahlíželi jako na vektory, které umíme sčítat a násobit reálným číslem. Nyní zavedeme operaci násobení dvou komplexních čísel.

3.1 Imaginární jednotka a rotace

Předpokládejme standardní pravidla z algebry (distributivitu) a vlastnost, že $i^2 = -1$. Nyní vynásobíme libovolné číslo $z = x + iy$ symbolem i :

$$i \cdot (x + iy) = ix + i^2y = ix + (-1)y = -y + ix$$

Z geometrického hlediska:

- Původní vektor byl $[x, y]$.
- Nový vektor po vynásobení číslem i je $[-y, x]$.

Z lineární algebry víme, že transformace $[x, y] \rightarrow [-y, x]$ odpovídá otočení (rotaci) vektoru o pravý úhel (90° nebo $\pi/2$) v kladném směru.

Tato geometrická interpretace nám dává vhled do identity $i^2 = -1$. Pokud násobení číslem i znamená jedno otočení o pravý úhel, pak dvojnásobení ($i \cdot i$) musí znamenat dvě otočení o pravý úhel – tedy otočení o 180° . Otočení o 180° změní libovolný vektor na jeho **opačný vektor**. Opačný vektor k z je $-1 \cdot z$. Geometricky tedy i^2 musí odpovídat násobení reálným číslem -1 .

3.2 Formální definice součinu

Na základě požadavku distributivity a vlastnosti $i^2 = -1$ definujeme součin dvou komplexních čísel $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ následovně:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

4 Maticová reprezentace komplexních čísel

Komplexní čísla lze ztotožnit s určitou množinou matic. Tento izomorfismus nám potvrdí, že $\mathbb{C}$ je tělesem. Uvažujme množinu matic M typu 2×2 ve tvaru:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Definujme zobrazení $F : \mathbb{C} \rightarrow M$, které každému číslu $z = x + iy$ přiřadí matici:

$$F(x + iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

4.1 Ověření izomorfismu

Abychom mohli říct, že jde o izomorfismus, musí toto zobrazení zachovávat operace sčítání a násobení.

1. **Zachování sčítání:** $F((x, y) \oplus (a, b)) = F(x, y) + F(a, b)$

$$F((x, y) \oplus (a, b)) = F(x + a, y + b) = \begin{pmatrix} x + a & -(y + b) \\ y + b & x + a \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) + F(a, b) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & -(y + b) \\ y + b & x + a \end{pmatrix}$$

Operace sčítání je zachována.

2. **Zachování násobení:** $F((x, y) \otimes (a, b)) = F(x, y) \cdot F(a, b)$

$$F((x, y) \otimes (a, b)) = F(xa - yb, xb + ya) = \begin{pmatrix} xa - yb & -(xb + ya) \\ xb + ya & xa - yb \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) \cdot F(a, b) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & -(xb + ya) \\ ya + xb & -yb + xa \end{pmatrix}$$

Zobrazení zachovává i násobení.

4.2 Ověření struktury tělesa pro $\mathbb{C}$

Na základě předchozích výpočtů jsme úspěšně ověřili, že zobrazení F je **izomorfismem**. To znamená, že algebraické chování komplexních čísel je strukturně identické s chováním námi definované množiny matic M .

Pro úplnost víme, že množina M spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří **okruh**. Tedy automaticky splňuje základní axiomy: asociativita sčítání i násobení a distributivita. Abychom však mohli strukturu $(M, +, \cdot)$, a vzhledem k izomorfismu i strukturu komplexních čísel $\mathbb{C}$, považovat za **těleso**, musí být splněny tyto doplňující axiomy:

1. **Komutativita násobení:** Pro $A, B \in M$ platí $AB = BA$.
2. **Existence jednotky:** Existuje matice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, pro kterou platí $IA = A$.
3. **Inverzní prvek:** Pro každou matici $A \in M, A \neq O$ existuje inverzní matice $A^{-1} \in M$. To platí, protože determinant $\det(A) = a^2 + b^2$ je pro nenulovou matici vždy nenulový.
4. **Nulový prvek:** Existuje nulová matice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$.

Protože jsou splněny axiomy okruhu i tyto dodatečné podmínky pro těleso, z izomorfismu vyplývá, že struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, neboli **těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$, je tělesem**.

5 Geometrická interpretace násobení komplexních čísel na jednotkové kružnici

Nyní se zaměříme na konkrétní případ **násobení komplexních čísel, která leží na jednotkové kružnici**. Tato čísla mají absolutní hodnotu rovnu 1 ($|z| = 1$) a v goniometrickém tvaru je lze zapsat jako $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

5.1 Násobení jako otočení (rotace)

Ukázali jsme, že násobení imaginární jednotkou i (která leží na jednotkové kružnici v úhlu 90°) odpovídá otočení o pravý úhel. Tento princip platí obecně: Násobení libovolným komplexním číslem z s velikostí 1 odpovídá **otočení o úhel φ** kolem počátku. Pokud násobíme dvě taková čísla, jejich úhly se sčítají, což geometricky znamená skládání rotací.

Vezměme si bod v rovině (x, y) jako komplexní číslo $w = x + iy$ a otočme jej o úhel φ vynásobením číslem $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$w' = z \cdot w = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (x + iy)$$

$$w' = (x \cos \varphi - y \sin \varphi) + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

Výsledné souřadnice nového bodu jsou tedy:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

5.2 Souvislost s násobením matic

Nyní využijeme již dokázaný izomorfismus $F(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Pokud do tohoto zobrazení vložíme číslo $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, dostaneme matici:

$$F(\cos \varphi, \sin \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Tato matice je v lineární algebře známá jako **matice rotace**. Když touto maticí vynásobíme vektor souřadnic, dostaneme stejný výsledek jako u komplexních čísel:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Tímto jsme ukázali rovnost mezi algebraickým součinem komplexních čísel a geometrickou operací rotace reprezentovanou maticovým násobením.