

Úvod do komplexní proměnné

Bc. Eva Pilecká

January 2026

V tomto textu budeme s komplexními čísly pracovat nejen „počítáním“, ale i geometricky. Ukážeme si, že komplexní čísla lze chápat jako body v rovině a že předpis $f(z) = az + b$ popisuje známé geometrické změny (posunutí, otočení, zvětšení/zmenšení). Nakonec zavedeme poměr bodů, který umí popsat polohu bodu na přímce i mimo ni.

1 Lineární funkce komplexní proměnné

Komplexní číslo jako bod v rovině

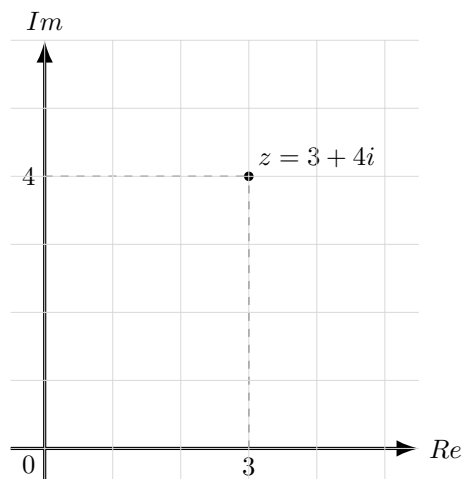
Komplexní číslo zapisujeme ve tvaru:

$$z = x + iy$$

kde:

- $x = \operatorname{Re}(z)$ je **reálná část**
- $y = \operatorname{Im}(z)$ je **imaginární část**
- i je jednotka s vlastností $i^2 = -1$

Každému komplexnímu číslu $z = x + iy$ přiřadíme bod $[x, y]$ v rovině. Této rovině říkáme **komplexní (Gaussova) rovina**. Vodorovná osa je reálná část a svislá osa je imaginární část. Například $z = 3 + 4i$ odpovídá bodu $[3, 4]$.



Obrázek 1: Komplexní číslo jako bod v Gaussově rovině: $z = 3 + 4i \leftrightarrow [3, 4]$.

Co je lineární funkce komplexní proměnné

Lineární funkce komplexní proměnné je předpis:

$$f(z) = az + b \quad a, b \in \mathbb{C}; \quad a \neq 0$$

Slovo **proměnná** znamená, že z se může měnit. Čísla a a b jsou **konstanty** (neměnné).

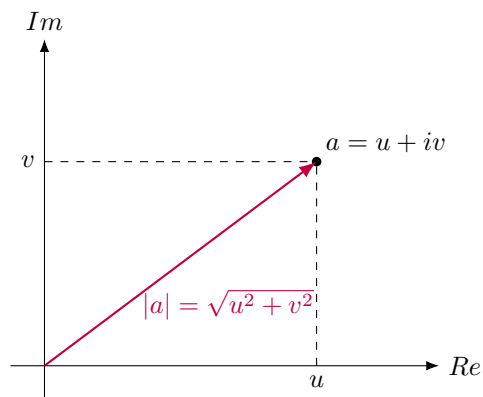
Toto zobrazení (tedy „změnu“ bodu z na bod $f(z)$) lze chápat jako dva kroky:

- **násobení** $z \mapsto az$
- **sčítání** $z \mapsto z + b$

Co dělá koeficient a (otočení a zvětšení/zmenšení)

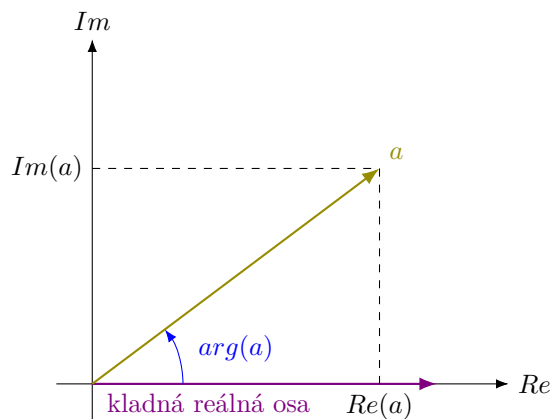
Násobení komplexním číslem a udělá dvě věci najednou:

- **Změna velikosti (měřítka):** číslo $|a|$ říká, kolikrát se vzdálenosti zvětší nebo zmenší
 - **Absolutní hodnota** (u komplexního čísla se často říká **modul**) je délka vektoru od počátku: pro $a = u + iv$ platí $|a| = \sqrt{u^2 + v^2}$.



Obrázek 2: Modul komplexního čísla $a = u + iv$ je délka vektoru od počátku do bodu $[u, v]$.

- **Otočení:** úhel $\arg(a)$ říká, o kolik stupňů se obraz otočí.
 - **Argument** $\arg(a)$ je úhel, který svírá vektor a s kladnou reálnou osou (měří se proti směru hodinových ručiček).



Obrázek 3: Argument $\arg(a)$ je úhel mezi kladnou reálnou osou a vektorem a (měří se proti směru hodinových ručiček).

Speciální případy:

- $a \in \mathbb{R}, a > 0$: jen zvětšení/zmenšení bez otočení
- $a \in \mathbb{R}, a < 0$: zvětšení/zmenšení a otočení o 180°
- $|a| = 1$: pouze otočení (délky se nemění)
- $a = i$: otočení o 90°

Co dělá koeficient b (posunutí)

Člen b znamená **posunutí** všech bodů roviny o stejný vektor b . To je stejné jako když v geometrii posuneme celý obrázek doprava/doleva/nahoru/dolů.

2 Souvislost s podobným zobrazením v rovině

Zobrazení:

$$f(z) = az + b \quad a \neq 0$$

je tzv. **podobné zobrazení** (zkráceně **podobnost**).

Co znamená „podobnost“? Je to zobrazení, které:

- zachovává tvary
- mění velikost, natočení a polohu
- zachovává úhly
- přímka se zobrazí na přímku
- kružnice se zobrazí na kružnici
- zachovává poměry délek (všechny vzdálenosti násobí stejným číslem $|a|$)

– Proč se všechny vzdálenosti násobí $|a|$? Pro dva body z_1, z_2 platí:

$$f(z_2) - f(z_1) = (az_2 + b) - (az_1 + b) = a(z_2 - z_1)$$

a tedy po absolutní hodnotě:

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |a| \cdot |z_2 - z_1|$$

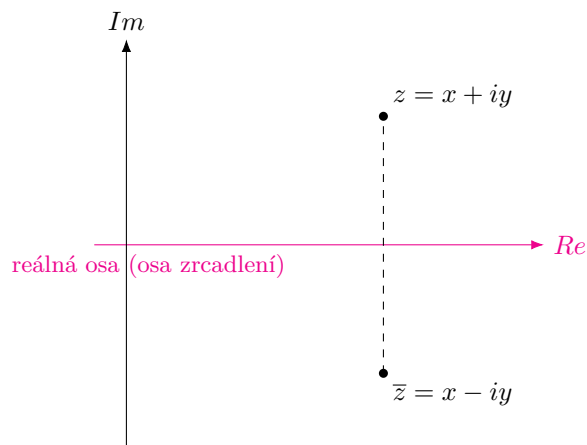
To říká: vzdálenost obrazů je $|a|$ -krát větší (nebo menší) než původní vzdálenost.

Poznámka: nepřímá podobnost

Zobrazení:

$$f(z) = a\bar{z} + b$$

je také podobnost, ale **nepřímá** („převrátí“ obrázek, změnění orientaci). Zde $\bar{z}$ znamená **komplexně sdružené číslo**: pokud $z = x + iy$, pak $\bar{z} = x - iy$. Geometricky to odpovídá zrcadlení podle reálné osy.



Obrázek 4: Komplexní sdružení $\bar{z}$ odpovídá zrcadlení podle reálné osy: $[x, y] \mapsto [x, -y]$.

3 Definice poměru bodů

Nechť bodům A, B, C odpovídají komplexní čísla a, b, c a platí $A \neq B$. **Poměr bodů** A, B, C definujeme jako:

$$k = \frac{c - a}{b - a}$$

Co to znamená prakticky? Výraz $c - a$ je vektor („šipka“) od A do C a $b - a$ je vektor od A do B . Poměr k tedy porovnává, jak je AC dlouhé a jakým směrem jde, ve srovnání s AB .

Geometrický význam

- **Velikost** $|k|$ říká, *kolikrát* je vzdálenost AC větší nebo menší než vzdálenost AB :

$$|k| = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Jinými slovy: porovnáváme délku úsečky AC s délkou úsečky AB .

Například:

- $|k| = 1$ znamená, že $|AC| = |AB|$
- $|k| = 0,5$ znamená, že $|AC|$ je polovina $|AB|$
- $|k| = 2$ znamená, že $|AC|$ je dvojnásobek $|AB|$

- **Úhel** $\arg(k)$ říká, jaký úhel svírají úsečky AB a AC .

Číslo $|k|$ popisuje jen *vzdálenost*; směr určuje až $\arg(k)$.

Pokud je k **reálné číslo** (nemá imaginární část), pak body A, B, C leží na jedné přímce.

Dělení úsečky v poměru

Často chceme popsat bod Z , který dělí úsečku AB v poměru λ . To zapíšeme takto:

$$\frac{z - a}{b - z} = \lambda$$

Pro body na přímce AB je $\lambda \in \mathbb{R}$ a platí:

- $\lambda > 0$ — **vnitřní dělení** (bod Z leží mezi A a B)
- $\lambda < 0$ — **vnější dělení** (bod Z leží mimo úsečku)

Ze vzorce vyjde přímo souřadnice bodu Z :

$$z = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1)$$

Například pro $\lambda = 1$ dostaneme střed úsečky:

$$z = \frac{a + b}{2}$$

4 Vlastnosti poměru bodů

Nechť:

$$k = \frac{c - a}{b - a}$$

je poměr bodů A, B, C

Vlastnosti

- **Poměr se nemění při podobnosti.** Pokud na všechny body použijeme $f(z) = \alpha z + \beta$ ($\alpha \neq 0$), pak:

$$\frac{f(c) - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{c - a}{b - a} = k$$

Jinak řečeno: posunutí, otočení a zvětšení/zmenšení poměr nezmění.

- **Kolineárnost (leží na jedné přímce)**

$$k \in \mathbb{R} \iff A, B, C \text{ leží na jedné přímce}$$

- **Význam $|k|$ a $\arg(k)$**

- $|k| = \frac{|AC|}{|AB|}$ (poměr vzdáleností)
- $\arg(k)$ (úhel mezi směry AB a AC)

- **Speciální hodnoty.**

- $k = 0 \iff C = A$
- $k = 1 \iff C = B$
- $k = -1 \iff A$ je střed úsečky BC

- **Dělení úsečky je vážený průměr.** Je-li bod Z dán poměrem λ , platí:

$$z = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda}a + \frac{\lambda}{1 + \lambda}b$$

Tento zápis je důležitý, protože ukazuje, že bod Z je **průměr** bodů A a B , ale ne „napůl“. Čísla:

$$\frac{1}{1 + \lambda} \quad \text{a} \quad \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

fungují jako **váhy** (kolik „přispěje“ bod A a kolik bod B). Platí přitom:

$$\frac{1}{1 + \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} = 1$$

takže Z je vždy kombinací bodů A a B .

- Pokud $\lambda = 1$, jsou váhy stejné ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) a dostaneme:

$$z = \frac{a + b}{2}$$

tedy **střed úsečky**

- Pokud $\lambda > 1$, váha u b je větší než u a , takže bod Z leží **blíže k bodu B** (bod B má „větší vliv“).
- Pokud $0 < \lambda < 1$, váha u a je větší než u b , takže bod Z leží **blíže k bodu A** .
- Pokud $\lambda < 0$, jedna z vah vyjde záporná. To znamená, že Z neleží mezi A a B , ale jde o **vnější dělení** (bod Z leží mimo úsečku).

Jinými slovy: parametr λ určuje, jak moc se bod Z „přitáhne“ k bodu A nebo k bodu B . Čím větší je λ , tím blíže je Z k B ; čím menší (ale kladné) je λ , tím blíže je Z k A .

5 Využití poměru bodů ke konstrukci podobného zobrazení

V předchozích kapitolách jsme viděli, že zobrazení:

$$f(z) = az + b \quad a \neq 0$$

je podobnost: zachovává úhly a všechny vzdálenosti násobí stejným číslem $|a|$. Současně jsme zavedli poměr bodů:

$$k = \frac{c - a}{b - a}$$

který popisuje polohu bodu C vůči bodům A, B .

Zásadní vlastností poměru bodů je jeho *invariance při podobnosti*. Pro zobrazení:

$$f(z) = \alpha z + \beta \quad \alpha \neq 0$$

platí:

$$\frac{f(c) - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{c - a}{b - a}$$

Poměr bodů se tedy při posunutí, otočení i zvětšení (zmenšení) nemění. Tuto vlastnost lze využít ke konstrukci obrazu bodu v podobném zobrazení.

Konstrukční princip

Nechť bodům A, B, C odpovídají komplexní čísla a, b, c a jejich obrazy A', B', C' čísla a', b', c' . Nejprve určíme poměr bodů:

$$k = \frac{c - a}{b - a}$$

Protože poměr je invariantní, platí:

$$k = \frac{c' - a'}{b' - a'}$$

Z tohoto vztahu přímo dostaneme vzorec pro obraz bodu C :

$$c' = a' + k(b' - a')$$

Geometricky to znamená, že bod C' získáme tak, že od bodu A' postupujeme ve směru k bodu B' stejným „násobkem“ a stejným otočením, jaké popisuje poměr k v původní konfiguraci.

Řešený příklad

Zadání. Necht:

$$A = 1 + i, \quad B = 4 + 2i, \quad C = 2 + 4i$$

a jejich obrazy:

$$A' = 2 - i, \quad B' = 5 + 2i$$

Najděte obraz bodu C' v podobném zobrazení.

1. Výpočet poměru bodů.

$$k = \frac{c - a}{b - a} = \frac{(2 + 4i) - (1 + i)}{(4 + 2i) - (1 + i)} = \frac{1 + 3i}{3 + i}$$

Vynásobením sdruženým číslem dostaneme:

$$k = \frac{(1 + 3i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{6 + 8i}{10} = 0,6 + 0,8i$$

2. Přenos poměru do obrazu.

Nejprve určíme rozdíl:

$$b' - a' = (5 + 2i) - (2 - i) = 3 + 3i$$

Potom:

$$k(b' - a') = (0,6 + 0,8i)(3 + 3i) = -0,6 + 4,2i$$

Nakonec:

$$c' = a' + k(b' - a') = (2 - i) + (-0,6 + 4,2i) = 1,4 + 3,2i$$

Výsledek:

$$\boxed{C' = 1,4 + 3,2i}$$

Poznamenejme, že poměr k má nenulovou imaginární část, takže body A, B, C neleží na jedné přímce. Stejná vlastnost se zachovává i u jejich obrazů v podobném zobrazení.

Řešený příklad – podrobný postup s vysvětlením *proč*

Zadání.

$$A = 1 + i, \quad B = 4 + 2i, \quad C = 2 + 4i, \quad A' = 2 - i, \quad B' = 5 + 2i$$

Máme najít obraz bodu C' při podobnosti (zobrazení tvaru $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$).

Základní myšlenka (proč to půjde přes poměr). Podobnost zachovává poměr bodů:

$$k = \frac{c - a}{b - a}$$

To znamená: jak je bod C „udělaný“ z bodů A a B (vektorově a úhlově), tak stejně je „udělaný“ i jeho obraz C' z bodů A' a B' . Proto:

$$k = \frac{c' - a'}{b' - a'} \Rightarrow c' = a' + k(b' - a')$$

Tento postup používáme proto, že *neznáme přímo* α a β , ale známe obrazy dvou bodů A', B' a to k určení C' stačí.

Krok 1: Zapiš si body jako komplexní čísla

$$a = 1 + i, \quad b = 4 + 2i, \quad c = 2 + 4i, \quad a' = 2 - i, \quad b' = 5 + 2i$$

Proč: V komplexní rovině je bod popsán komplexním číslem. Výpočty (zvlášť rozdíly a poměry) se dělají jednoduše algebraicky, ale mají přímý geometrický význam.

Krok 2: Spočti rozdíly $c - a$ a $b - a$

$$c - a = (2 + 4i) - (1 + i) = 1 + 3i$$

$$b - a = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$$

Proč: Výraz $c - a$ je vektor $\overrightarrow{AC}$ a $b - a$ je vektor $\overrightarrow{AB}$. Poměr bodů je definován jako podíl těchto dvou vektorů:

$$k = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$$

Tím porovnáváme, jak se z $\overrightarrow{AB}$ musí stát $\overrightarrow{AC}$ (z hlediska délky i směru).

Krok 3: Vypočti $k = \frac{c - a}{b - a}$

$$k = \frac{1 + 3i}{3 + i}$$

Proč: k je „instrukce“, která říká:

- $|k|$ je poměr délek $\frac{|AC|}{|AB|}$
- $\arg(k)$ je úhel, o který se musí otočit směr AB , aby vznikl směr AC

Takže když k známe, umíme stejnou instrukci použít i na obrazovou úsečku $A'B'$.

Proč násobíme sdruženým číslem: Dělení komplexních čísel chceme převést na dělení reálným číslem. Proto násobíme sdruženým číslem ke jmenovateli $(3+i)$, tedy $(3-i)$:

$$k = \frac{1+3i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

Proč: Součin komplexního čísla a k němu sdruženého čísla je číslo reálné:

$$(3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9 - (-1) = 10$$

Tím ve jmenovateli nebude imaginární člen a zůstane pouze reálným číslem, se kterým se snadno dělí.

Výpočet čitatele – roznásobení:

$$(1+3i)(3-i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-i) + 3i \cdot 3 + 3i \cdot (-i) = 6 + 8i$$

Proč: Je to běžné násobení mnohočlenů (distributivní zákon). Navíc musíme použít:

$$i^2 = -1$$

protože při násobení vzniká člen s i^2 .

Závěr pro k :

$$k = \frac{6+8i}{10} = 0,6 + 0,8i$$

Proč to je důležité: Toto číslo teď přeneseme do obrazu: udělá stejný poměr délek a stejné otočení, ale už nad úsečkou $A'B'$.

Krok 4: Spočti vektor v obraze $b' - a'$

$$b' - a' = (5+2i) - (2-i) = 3+3i$$

Proč: Vzorec pro obraz bodu je:

$$c' = a' + k(b' - a')$$

Potřebujeme tedy nejprve vektor $\overrightarrow{A'B'}$, abychom na něj mohli aplikovat „instrukci“ k .

Krok 5: Vypočti $k(b' - a')$

$$k(b' - a') = (0,6 + 0,8i)(3 + 3i) = -0,6 + 4,2i$$

Proč: Násobení komplexním číslem geometricky znamená:

- zvětšit (nebo zmenšit) délku vektoru určitým koeficientem ($|k|$)
- otočit ho o úhel $\arg(k)$

Takže $k(b' - a')$ je přesně vektor $\overrightarrow{A'C'}$.

Proč se objeví i^2 : Při roznásobení vznikne člen $0,8i \cdot 3i = 2,4i^2$, a ten musíme přepsat pomocí $i^2 = -1$, abychom výsledek zapsali jako „reálná část + imaginární část“.

Krok 6: Přičti k a' a získej c'

$$c' = a' + k(b' - a') = (2 - i) + (-0,6 + 4,2i) = 1,4 + 3,2i$$

Proč: Vektor $k(b' - a')$ nám dává posun od A' k hledanému bodu C' . Když tento posun přičteme k souřadnici bodu A' , dostaneme souřadnici koncového bodu, tedy C' . Je to totéž jako v geometrii: „bod + vektor = nový bod“.

Výsledek:

$$C' = 1,4 + 3,2i$$