

Komplexní čísla: Definice a vlastnosti (tvoří těleso)

Komplexní čísla

Cílem tohoto dokumentu je seznámit čtenáře s pojmem komplexních čísel prostřednictvím několika různých definic. Text je strukturován tak, aby postupoval od elementárních pojetí, vhodných pro první seznámení, až po formálnější algebraické konstrukce. Pro zájemce o hlubší studium jsou v závěru zmíněny i abstraktnější přístupy, které otevírají dveře k pokročilejším tématům.

1. definice: Středoškolský přístup (intuitivní přiblížení)

Tato definice zavádí komplexní čísla takto:

$$a + ib, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R} \text{ a kde}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Tento přístup je sice intuitivní, ale může vést k nekonzistencím, pokud se neopatrně zachází s odmocninami. Problém ilustruje následující příklad:

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i, \quad \frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = i$$

Tento spor vzniká proto, že pravidlo $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, které platí pro kladná reálná čísla, nelze bez úprav použít pro záporné argumenty. Z tohoto důvodu je přesnější zavést komplexní čísla rigoróznějším způsobem.

2. definice: Ryze algebraická

Nyní se ale podíváme na druhou možnou definici, kterou lze použít při zavádění komplexních čísel. Tato definice má jisté výhody, proto ji uvádíme jako jednu z důležitých. Zdefinujme si tedy komplexní čísla následujícím způsobem:

Vezměme algebraickou strukturu $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ kde jsou binární operace na $\mathbb{R}^2$ (tzn. dvojici prvků z $\mathbb{R}^2$ přiřadí prvek z $\mathbb{R}^2$) a jsou definovány vztahem:

$$\begin{aligned} [a, b] \oplus [c, d] &= [a + c, b + d] \\ [a, b] \odot [c, d] &= [ac - bd, ad + bc] \end{aligned}$$

Výhoda tohoto formálního zavedení spočívá v tom, že vlastnosti imaginární jednotky i nemusíme předpokládat, ale přirozeně vyplynou z definice početních operací. Můžeme se tedy zaměřit na zkoumání vlastností této algebraické struktury a určení toho, zda se jedná o okruh či těleso.

Vlastnosti

Odvodíme vlastnosti, které v této algebraické struktuře platí.

1. $[x, 0] \oplus [y, 0] = [x + y, 0]$
2. $[x, 0] \odot [y, 0] = [xy, 0]$
3. $[0, 1] \odot [0, 1] = [-1, 0]$
4. $[y, 0] \odot [0, 1] = [y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0] = [0, y]$

Z 1, 2 plyne, že množina $\{[x, 0] : x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi $\oplus, \odot$, matematicky zapsáno $(\{[x, 0] : x \in \mathbb{R}\}, \oplus, \odot)$ je izomorfní s $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Zavedeme-li označení $i \equiv [0, 1]$ a $x \equiv [x, 0]$ pro $x \in \mathbb{R}$, pak z 1 až 4 plyne

$$i \cdot i = [-1, 0] = -1$$
$$[x, y] = [x, 0] \oplus [0, y] = [x, 0] \oplus [y, 0] \odot [0, 1] = x + iy$$

Komplexní čísla tvoří těleso

Naším cílem je ukázat, že komplexní čísla tvoří těleso. V této definici si dáme tu práci, že si každou vlastnost tělesa ukážeme a tím potvrdíme platnost těchto axiomů. Připomeňme jen, že operace $+$, $\cdot$ jsou operace na reálných číslech a mají tedy normální vlastnosti.

- **Komutativita $\oplus$:**

$$[a, b] \oplus [c, d] = [a + c, b + d];$$
$$[c, d] \oplus [a, b] = [c + a, d + b].$$

- **Asociativita $\oplus$:**

$$([a, b] \oplus ([c, d] \oplus [e, f])) = [a, b] \oplus [c + e, d + f] = [a + c + e, b + d + f];$$
$$(([a, b] \oplus [c, d]) \oplus [e, f]) = [a + c, b + d] \oplus [e, f] = [a + c + e, b + d + f].$$

- **Nulový prvek $\oplus$:**

$$[a, b] \oplus [0, 0] = [a + 0, b + 0] = [a, b].$$

- **Opačný prvek $\oplus$:**

$$[a, b] \oplus [-a, -b] = [a + (-a), b + (-b)] = [0, 0].$$

- **Komutativita $\odot$:**

$$[a, b] \odot [c, d] = [ac - bd, ad + bc];$$
$$[c, d] \odot [a, b] = [ca - db, cb + da].$$

- **Asociativita $\odot$:**

$$\begin{aligned}
[a, b] \odot ([c, d] \odot [e, f]) &= [a, b] \odot [ce - df, cf + de] \\
&= [a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)] \\
&= [ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf]; \\
([a, b] \odot [c, d]) \odot [e, f] &= [ac - bd, ad + bc] \odot [e, f] \\
&= [(ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e] \\
&= [ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce].
\end{aligned}$$

- **Jednotkový prvek $\odot$:**

$$[a, b] \odot [1, 0] = [a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1] = [a, b].$$

- **Existuje inverzní prvek?** Hledáme prvek $[x, y]$ tak, aby platilo $[a, b] \odot [x, y] = [1, 0]$. Podle definice násobení to vede na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
ax - by &= 1 \\
bx + ay &= 0
\end{aligned}$$

řešíme tedy determinant matice soustavy: $\det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$.

Nyní si připomeňme, jak přesně zní axiom o inverzním prvku: pro každé $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, existuje inverzní prvek (značíme ho z^{-1}) tak, že platí $z \cdot z^{-1} = 1$.

Determinant je tedy nenulový, matice je regulární a proto existuje řešení soustavy, z čehož dále vyvozujeme existenci inverzního prvku.

- **Distributivita:**

$$\begin{aligned}
[a, b] \odot ([c, d] \oplus [e, f]) &= [a, b] \odot ([c + e, d + f]) \\
&= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)] \\
&= [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be]; \\
([a, b] \odot [c, d]) \oplus ([a, b] \odot [e, f]) &= [ac - bd, ad + bc] \oplus [ae - bf, af + be] \\
&= [ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be].
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že komplexní čísla s operacemi $\oplus$ a $\odot$ tvoří těleso. Kromě této a úvodní definice existují i další, abstraktnější přístupy, které mohou být užitečné pro čtenáře s hlubšími znalostmi algebry. Níže stručně představíme tři z nich.

3. definice: Středoškolská

Tento přístup řeší nekonzistence úvodní intuitivní definice tím, že se nesnaží definovat, čím *je* i (problematickým $\sqrt{-1}$), ale co *splňuje*. Místo toho jednoduše postulujeme (tj. stanovíme jako základní, nedokazovaný předpoklad) existenci **imaginární jednotky** i , jejíž klíčovou vlastností je rovnice:

$$i^2 = -1$$

Komplexní číslo je pak výraz tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Všechny početní operace a vlastnosti komplexních čísel jsou následně odvozeny z tohoto jediného axiomu.

4. definice: Komplexní čísla jako kořenové nadtěleso

V abstraktní algebře lze těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ zkonstruovat tak, že k tělesu reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ formálně "přidáme" prvek (označme ho i), který je definován jako kořen rovnice $x^2 + 1 = 0$.

5. definice: Komplexní čísla jako okruh zbytkových tříd polynomů

Další algebraický přístup definuje komplexní čísla jako množinu všech zbytků po dělení polynomů s reálnými koeficienty polynomem $P(x) = x^2 + 1$. Každý takový zbytek má tvar $a + bx$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud ztotožníme proměnnou x s imaginární jednotkou i , dostaneme tradiční zápis komplexního čísla $a + bi$. Vztah $i^2 = -1$ zde přirozeně vyplývá z faktu, že počítáme se zbytky po dělení $x^2 + 1$, tedy $x^2 + 1 \equiv 0$, z čehož plyne $x^2 \equiv -1$. Množina takových zbytkových tříd obecně tvoří strukturu zvanou okruh. Klíčovou vlastností polynomu $P(x) = x^2 + 1$ je jeho ireducibilita (nerozložitelnost) nad reálnými čísly, která zaručuje, že tato struktura je přímo tělesem.