

Písemná část zkoušky z UKPX

16. ledna 2025

1. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ platí

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

1*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

2. Vypočtete kořeny rovnic v komplexním oboru a zobrazte je v Gaussově rovině

(a)

$$z^4 = -1$$

(b)

$$z^2 + 2iz + 3 = 0$$

2*

$$z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$$

3. Ukažte, že funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky

$$f(z) = z^4$$

3*

$$f(z) = z^4 \exp(z)$$

4. Vypočtete kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v Gaussově rovině

$$\cos(z) = 4i$$

4*

$$\cos(2z + i) = 4i$$

5. Sečtete řadu a určete její kruh konvergence. Vypočtete derivaci $f'(z)$ a vyjádřete ji ve tvaru mocninné řady.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

5*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^{2k+1}$$