

Písemná část zkoušky z UKPX

23. ledna 2025

1. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

1*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

2. Vypočtete kořeny rovnic v komplexním oboru a zobrazte je v Gaussově rovině

(a)

$$z^2 = -i$$

(b)

$$z^2 + 2iz + 3 = 0$$

2*

$$z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$$

3. Ukažte, že funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky

$$f(z) = z \exp(z)$$

3*

$$f(z) = z^2 \exp(z)$$

4. Vypočtete kořeny rovnice v oboru komplexních čísel a zobrazte je v Gaussově rovině

$$\sin(z) = 4$$

4*

$$\sin(z + i) = 4$$

5. Sečtete řadu a určete její kruh konvergence. Vypočtete derivaci $f'(z)$ a vyjádřete ji ve tvaru mocninné řady.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

5*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z + 1)^{2k+1}$$