

ÚLOHY PRO PŘÍPRAVU NA PRVNÍ TEST PŘEDMĚTU SEMINÁŘ Z MATEMATIKY

Cíle:

Student/studentka umí upravovat zlomky, ovládá operace s mnohočleny. Umí řešit rovnice s použitím úpav. Umí vyřešit kvadratickou rovnici. Ví jak substitucí snížit stupeň polynomu v rovnici. Umí provést zkoušku kořenů rovnice i soustavy rovnic. Počítání s malými celými čísly zvládá bez kalkulačky. Ví, že neznámá v rovnici může být označena i jiným symbolem než x a umí takové rovnice řešit.

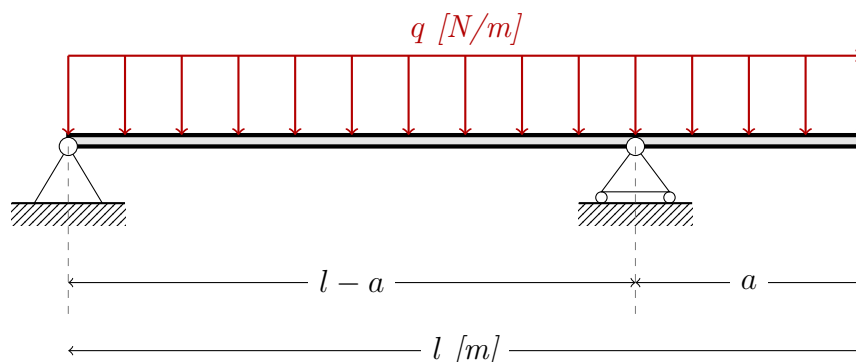
Umí načrtnout graf lineární, kvadratické a lineárně lomené funkce. Umí spočítat průsečíky grafů dvou funkcí a umí tyto průsečíky vyznačit na grafu. Umí spočítat průsečíky grafu funkce se souřadnými osami a umí tyto průsečíky vyznačit na grafu.

Umí řešit soustavu rovnic o dvou neznámých úpravami jednotlivých rovnic, sčítací a vylučovací metodou.

Ví, co je aritmetický a geometrický průměr a co je aritmetická a geometrická posloupnost a zná souvislost těchto pojmů a tuto souvislost umí použít na příkladech. Umí spočítat součet konečné aritmetické řady. Umí spočítat součet konečné a nekonečné geometrické řady, vyčíslení součtu nekonečné geometrické řady umí bez použití kalkulačky.

Poznámka: Úlohy do testu jsou číslovány arabskými čísly. Úlohy číslované římskými čísly pro testy určeny nejsou, jsou to motivační úlohy propojující odborné strojařské předměty s matematikou.

- I. Uvažujme nosník délky l [m] spojitě zatížený silou q [N/m], modulu pružnosti E [Pa] a průřezu s kvadratickým momentem k ose kolmé k nárysně J [m⁴].



Nosník je podepřený na jednom svém konci kloubovou podporou a na dalším místě posuvnou podporou tak, že volný konec nosníku má délku

$a \in \langle 0, l \rangle$. Ví se, že průhyb w volného konce nosníku je roven

$$w = \frac{q}{24EJ}al(a^2 + 3al - l^2)$$

Vypočtěte, pro jaké délky volného konce a je průhyb w nulový, případně kladný či záporný.

2a Nalezněte kořen/-y rovnice a udělejte zkoušku

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) = (2x-1) \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right)$$

2b

$$\frac{1}{x+1} + x = (x-1) \left(\frac{1}{x+1} + 2\right)$$

2c

$$1 + \frac{4}{x-2} = \frac{2x+3}{x^2-4}$$

2d

$$\frac{3}{x^3-x} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$$

3a Nalezněte kořen/-y rovnice a udělejte zkoušku

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right) = 2x-1$$

3b

$$\frac{\frac{1}{x+1} + x}{\frac{1}{x+1} + 2} = x-1$$

3c

$$\frac{1 + \frac{4}{x-2}}{\frac{1}{x^2-4}} = 2x+3$$

4a Vyřešte rovnici a udělejte zkoušku

$$(x^2+2)^2 = x(x^3+3x+5)$$

4b

$$(x^2-2)(x+6) = x^2(x+2)$$

4c

$$x^2(x^2 - 6) + 8 = 0$$

4d

$$x^2(x^2 - 7) = 18$$

5a Načrtněte graf funkce f

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)$$

5b

$$f(x) = 2 - x - x^2$$

5c

$$f(x) = 2 - x + x^2$$

5d

$$f(x) = 6 - x - x^2$$

5e

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

6a Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí f , g , vypočtěte a vyznačte *jejich* průsečíky.

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 2$$

6b

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = 4x - 2$$

6c

$$f(x) = \frac{2}{3 - x} \quad g(x) = 2$$

6d

$$f(x) = \frac{4}{x + 1} \quad g(x) = 2x$$

7a Vyřešte soustavu rovnic a udělejte zkoušku

$$\begin{aligned} 3(x - 2) + 2y &= x + y \\ 4x + 3(y + x) &= 3x - 6 \end{aligned}$$

7b

$$\begin{aligned}-2x + 4(y + 1) &= 3 + y \\ 2(x - 2y) + 3(x + 1) &= x + 4\end{aligned}$$

7c

$$\begin{aligned}3(a - b) + 4a &= b - 5 \\ -(3a + 3) + 2(a + b + 2) &= a + 3b - 4\end{aligned}$$

8a Nalezněte kořen/-y rovnice a udělejte zkoušku

$$\left(\frac{y}{y-1} - \frac{y+1}{y}\right) = (2y-1) \left(\frac{y}{y+1} - \frac{y-1}{y}\right)$$

8b

$$\frac{1}{z+1} + z = (z-1) \left(\frac{1}{z+1} + 2\right)$$

8c

$$1 + \frac{4}{b-2} = \frac{2b+3}{b^2-4}$$

8d

$$\frac{3}{a^3-a} + \frac{3}{a^2-1} = \frac{1}{a-1}$$

9a Nalezněte kořen/-y rovnice a udělejte zkoušku

$$\left(\frac{y}{y-1} - \frac{y+1}{y}\right) : \left(\frac{y}{y+1} - \frac{y-1}{y}\right) = 2y-1$$

9b

$$\frac{\frac{1}{a+1} + a}{\frac{1}{a+1} + 2} = a-1$$

9c

$$\frac{1 + \frac{4}{c-2}}{\frac{1}{c^2-4}} = 2c+3$$

10a Určete všechna reálná čísla x , pro něž čísla a_1, a_2, a_3 tvoří aritmetickou posloupnost. Členy posloupnosti vypočtěte.

$$a_1 = x-1, \quad a_2 = x+1, \quad a_3 = x^2-3$$

10b

$$a_1 = x^2, \quad a_2 = 2x + 1, \quad a_3 = x + 2$$

10c

$$a_1 = x^2 - 5, \quad a_2 = x + 2, \quad a_3 = x - 3$$

11a Určete všechna reálná čísla x , pro něž čísla a_1, a_2, a_3 tvoří geometrickou posloupnost. Členy posloupnosti vypočtete.

$$a_1 = x - 3, \quad a_2 = x + 1, \quad a_3 = 2x + 8$$

11b

$$a_1 = x + 1, \quad a_2 = x + 4, \quad a_3 = 2x$$

11c

$$a_1 = 2x, \quad a_2 = x - 3, \quad a_3 = x + 1$$

12a Vyčíslete součty řad

$$s_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = \sum_{k=0}^{49} 2k + 1$$

$$s_2 = 1 + 0.9 + 0.9^2 + 0.9^3 + 0.9^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k$$

12b

$$s_1 = 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 1.2^k$$

$$s_2 = 10 + 11 + 12 + \cdots + 150 = \sum_{k=10}^{150} k$$

12c

$$s_1 = 0.8 + 0.8^2 + 0.8^3 + 0.8^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 0.8^k$$

$$s_2 = -8 - 7 - 6 - \cdots + 99 = \sum_{k=-8}^{99} k$$

12d

$$s_1 = 3 + 1.5 + 0.75 + 0.375 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot (0.5)^k$$

$$s_2 = 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 107 = \sum_{k=0}^{34} 5 + 3k$$

12e

$$s_1 = -5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + \dots + 121 = \sum_{k=-5}^{121} k$$

$$s_2 = 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.8 + 1.6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 0.1 \cdot 2^k$$

Nápověda na úlohy s aritmetickou a geometrickou posloupností:
Čísla a_1 , a_2 , a_3 tvoří aritmetickou posloupnost, pokud je rozdíl (diference) dvou sousedních členů konstantní, tj. pokud platí

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Odtud vyjádříme $a_2 = (a_1 + a_3)/2$, tedy člen aritmetické posloupnosti je roven aritmetickému průměru členu předchozího a následujícího.
Podobně pro geometrickou posloupnost platí

$$a_3/a_2 = a_2/a_1$$

odkud vyjádříme $a_2^2 = a_1 a_3$. Pro nezáporné a_2 dále upravíme $a_2 = \sqrt{a_1 a_3}$, tedy nezáporný člen geometrické posloupnosti je roven geometrickému průměru členu předchozího a následujícího.