

ÚLOHY PRO PŘÍPRAVU NA TŘETÍ TEST PŘEDMĚTU SEMINÁŘ Z MATEMATIKY

Cíle:

Student/studentka spočítá skalární a vektorový součin dvou vektorů, zná jejich geometrický význam a ví, jak je použít k výpočtům vzdáleností rovin, přímk, bodů v rovině i prostoru.

Spočítá průsečík přímk v rovině a průsečík přímky s rovinou v prostoru.

Ze zadaných parametrických rovnic křivky spočítá tečný vektor a vektor normály ke křivce a k prostorové křivce navíc vektor binormály.

Spočítá poloměr oskulační kružnice, souřadnice středu této kružnice. U rovinných křivek napíše rovnici oskulační kružnice a vypočtený střed a poloměr oskulační kružnice zkontroluje s nakreslenou křivkou.

Poznámka: Úlohy do testu jsou číslovány arabskými čísly. Úlohy číslované římskými čísly pro testy určeny nejsou, jsou to motivační úlohy propojující odborné strojařské předměty s matematikou.

- I. *Síla $\vec{F}$ je dána svými složkami F_x, F_y, F_z . Působí v bodě $A[x_A, y_A, z_A]$. Osa o prochází bodem $B[x_B, y_B, z_B]$ a je skloněná pod směrovými úhly $\alpha_o, \beta_o, \gamma_o$. Vypočtěte moment síly $\vec{F}$ k ose o , je-li dáno:*

$$\vec{F}(60, 80, 100)N, \quad A[2, 8, 7]m, \quad B[7, 3, 6]m, \quad o(108, 18, \gamma_o \leq 90)^\circ.$$

- 2a Pro vektory $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (1, -3)$ vypočtěte vektor $\vec{b}_\parallel$, který je průmětem vektoru $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$ a vektor $\vec{b}_\perp$, který je průmětem vektoru $\vec{b}$ do směru kolmého k vektoru $\vec{a}$. Výpočet zkontrolujte náčrtkem všech čtyř vektorů a dále ověřte, že platí

- (a) $\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp$
- (b) Vektory $\vec{b}_\parallel, \vec{b}_\perp$ jsou vzájemně kolmé, tj. platí $\vec{b}_\parallel \cdot \vec{b}_\perp = 0$.
- (c) Vektory $\vec{a}, \vec{b}_\perp$ jsou vzájemně kolmé.
- (d) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}_\perp\|$ (zde $|$ značí absolutní hodnotu a $\|$ velikost vektoru)
- (e) $\vec{a} \cdot \vec{b}_\parallel = \vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b}_\perp = 0$

- 3a Stejná úloha jako předchozí, ale ve 3D. Vektor $\vec{b}_\perp$ je průmětem do směru v rovině určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$ kolmého k $\vec{a}$. V (d) bude místo absolutní hodnoty velikost vektoru $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

$$\vec{a} = (2, 0, 1), \quad \vec{b} = (-4, 2, 3)$$

- 4a Vypočtete vzdálenost bodu A od přímky BC . Situaci narýsujte, vzdálenost změřte a porovnejte s odhadem číselné hodnoty výsledku¹.

$$A[2, 0], \quad B[-1, 0], \quad C[0, 1]$$

4b

$$A[0, 0], \quad B[5, 2], \quad C[1, -1]$$

- 5a Vypočtete vzdálenost bodu A od přímky p . Situaci narýsujte, vzdálenost změřte a porovnejte s odhadem číselné hodnoty výsledku².

$$A[5, -2], \quad p : x - y = 4$$

5b

$$A[5, -1], \quad p : 3x - 4y = 24$$

- 6a Vypočtete vzdálenost bodu A od přímky BC . Výsledek nevyčísľujte, nechte ho ve tvaru odmocniny.

$$A[2, 0, 1], \quad B[-1, 0, 3], \quad C[1, 1, 1]$$

6b

$$A[0, 1, -2], \quad B[2, 3, -1], \quad C[2, 1, 1]$$

- 7a Vypočtete vzdálenost přímky AB od přímky CD . Výsledek nevyčísľujte, nechte ho ve tvaru odmocniny.

$$A[2, 0, 2], \quad B[2, 0, 4], \quad C[0, 5, 1], \quad D[0, 3, 1]$$

7b

$$A[0, 0, 0], \quad B[2, -3, 0], \quad C[-2, -2, 0], \quad D[0, 0, 1]$$

- 8a Vypočtete průsečík přímky AB s přímkou p . Výsledek zkontrolujte náčrtkem přímek.

$$A[2, 4], \quad B[-2, 0], \quad p : 3x - y = 6$$

8b

$$A[3, -1], \quad B[2, 1], \quad p : 2x - y + 1 = 0$$

¹Uvažujte $\sqrt{2} \doteq 1.4$

²Opět uvažujte $\sqrt{2} \doteq 1.4$

9a Vypočtete průsečík přímky AB s rovinou ϱ .

$$A[2, 0, 3], \quad B[3, -2, 0], \quad \varrho : x - 2y + z = 9$$

9b

$$A[0, 2, 1], \quad B[2, 0, 2], \quad \varrho : x + y + 2z = 8$$

10a Vypočtete souřadnice normály roviny ABC .

$$A[2, 1, 0], \quad B[5, 1, 3], \quad C[2, 0, 4]$$

10b

$$A[1, 0, 3], \quad B[4, 2, 2], \quad C[3, 1, 0]$$

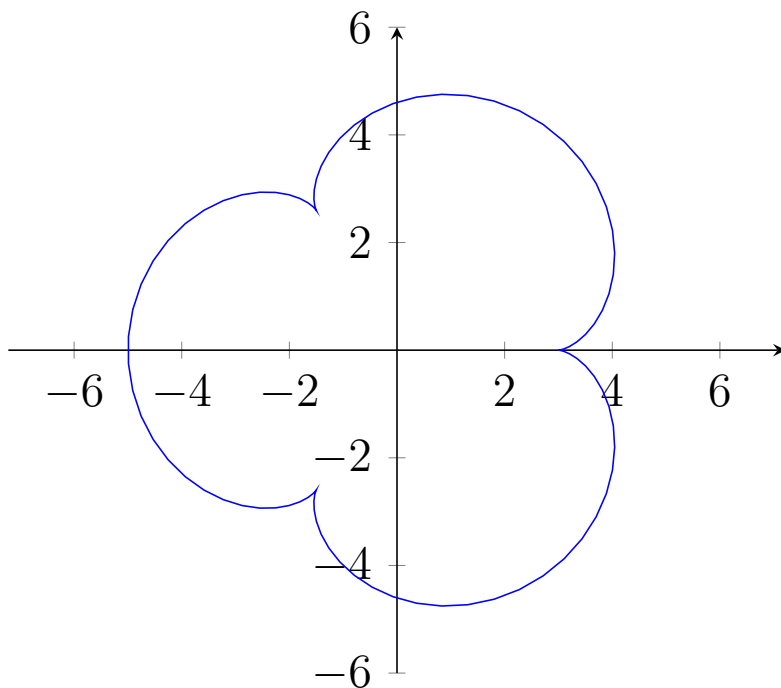
11a Na obrázku je hypocykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (4 \cos(t) - \cos(4t), 4 \sin(t) - \sin(4t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-4 \sin(t) + 4 \sin(4t), 4 \cos(t) - 4 \cos(4t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-4 \cos(t) + 16 \cos(4t), -4 \sin(t) + 16 \sin(4t))\end{aligned}$$

Vypočtete souřadnice bodu $B = \vec{r}(\pi/2)$. V bodě B vypočtete tečný a normálový vektor k hypocykloidě. Orientaci normálového vektoru zvolte stejnou, jako má dostředivé zrychlení. Bod B , tečný a normálový vektor zakreslete do obrázku.



12a Vypočtete poloměr oskulační kružnice hypocykloidy z předchozího příkladu v bodě B .

13a Vypočtete střed S oskulační kružnice hypocykloidy z předchozího příkladu v bodě B . Zakreslete střed S do obrázku.

14a Napište rovnici oskulační kružnice hypocykloidy z předchozího příkladu v bodě B .

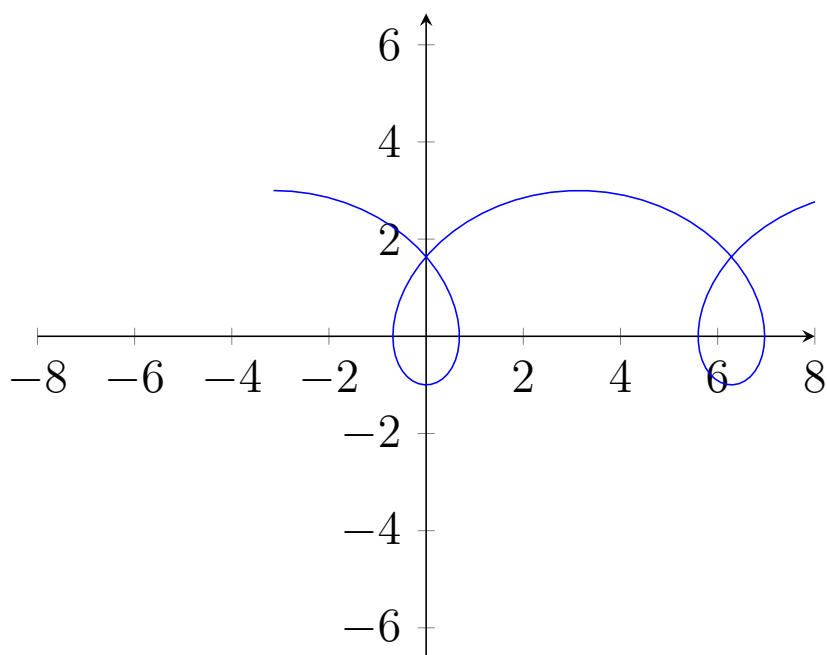
11-14b Na obrázku je cykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t - 2 \sin(t), 1 - 2 \cos(t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (1 - 2 \cos(t), 2 \sin(t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (2 \sin(t), 2 \cos(t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro cykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



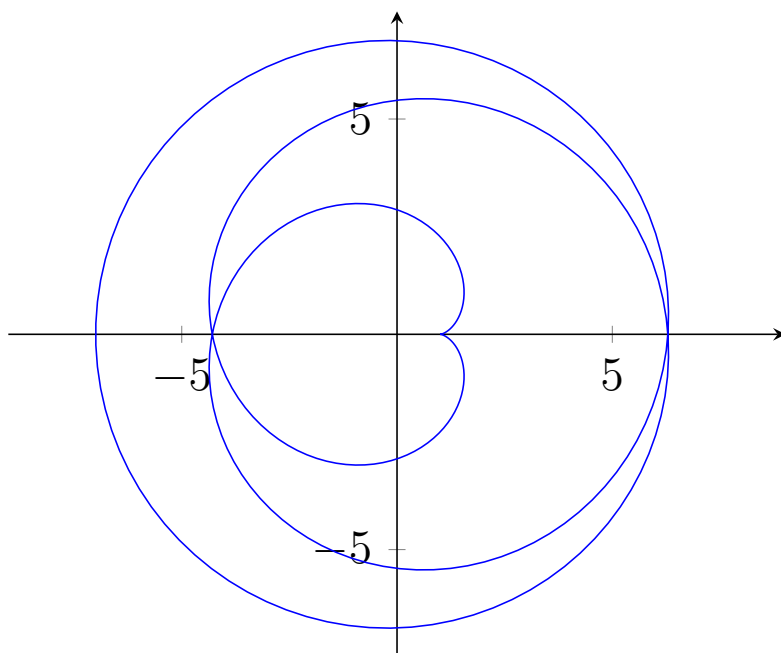
11-14c Na obrázku je pericykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (4 \cos(3t) - 3 \cos(4t), 4 \sin(3t) - 3 \sin(4t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (-12 \sin(3t) + 12 \sin(4t), 12 \cos(3t) - 12 \cos(4t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (-36 \cos(3t) + 48 \cos(4t), -36 \sin(3t) + 48 \sin(4t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro pericykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



11-14d Na obrázku je pericykloida o parametrických rovnicích

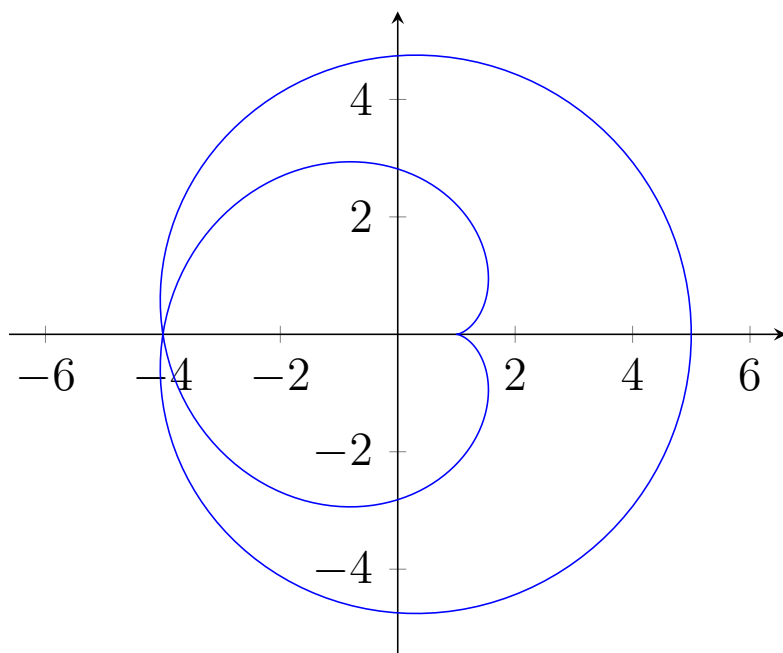
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (3 \cos(2t) - 2 \cos(3t), 3 \sin(2t) - 2 \sin(3t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-6 \sin(2t) + 6 \sin(3t), 6 \cos(2t) - 6 \cos(3t))$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-12 \cos(2t) + 18 \cos(3t), -12 \sin(2t) + 18 \sin(3t))$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro pericykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



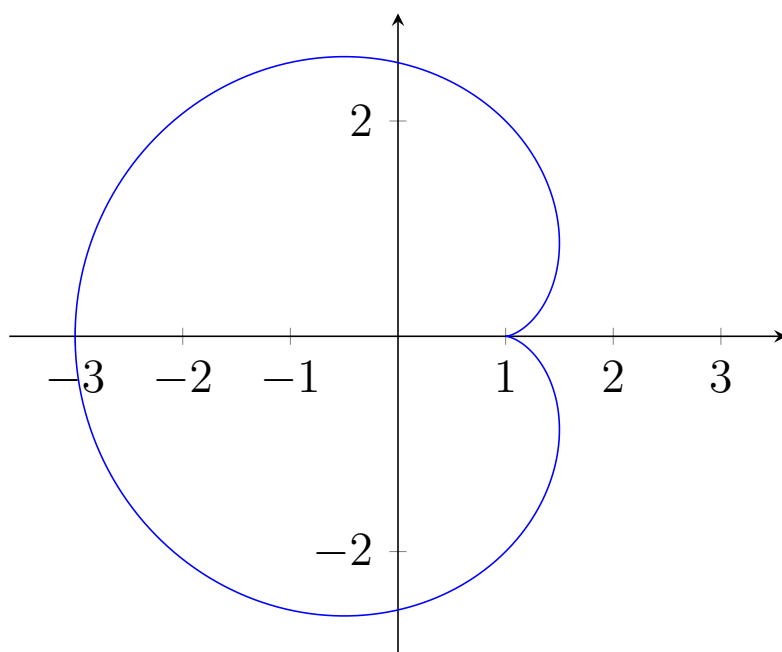
11-14e Na obrázku je pericykloida o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) &= (-2 \sin(t) + 2 \sin(2t), 2 \cos(t) - 2 \cos(2t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) &= (-2 \cos(t) + 4 \cos(2t), -2 \sin(t) + 4 \sin(2t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro pericykloidu a bod $B = \vec{r}(\pi/2)$.



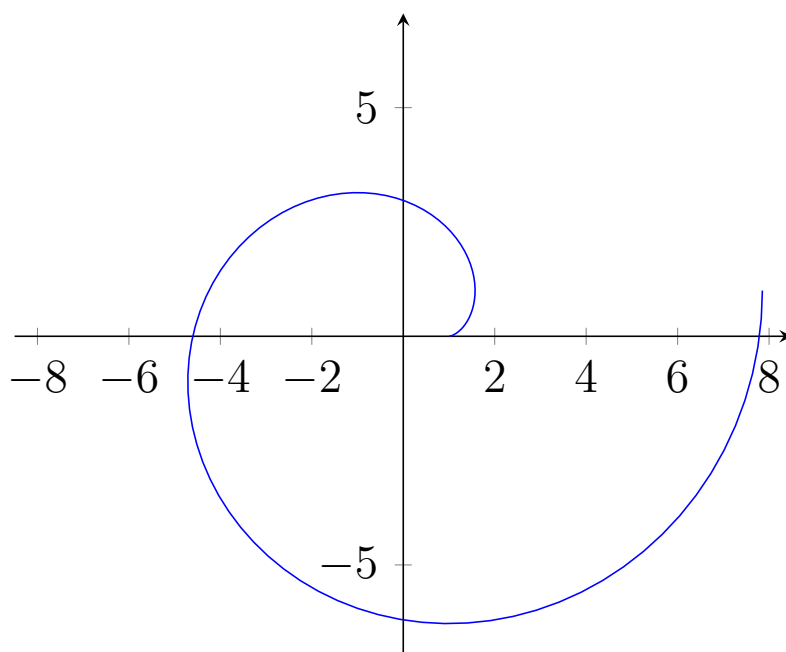
11-14f Na obrázku je evolventa o parametrických rovnicích

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t) + t \sin(t), \sin(t) - t \cos(t))$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (t \cos(t), t \sin(t)) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t))\end{aligned}$$

Řešte úlohy 11 – 14 pro evolventu a bod $B = \vec{r}(\pi)$.



15a Šroubovice má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 3t)$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 3) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-2 \cos(t), -2 \sin(t), 0)\end{aligned}$$

Vypočtete souřadnice bodu $B = \vec{r}(\pi/2)$ a poloměr oskulační kružnice v bodě B .

15b Šroubovice má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3 \cos(t), 3 \sin(t), 4t)$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-3 \sin(t), 3 \cos(t), 4) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-3 \cos(t), -3 \sin(t), 0)\end{aligned}$$

Vypočtete souřadnice bodu $B = \vec{r}(3\pi)$ a poloměr oskulační kružnice v bodě B .

16a Šroubovice má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3 \cos(t), 3 \sin(t), 4t)$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-3 \sin(t), 3 \cos(t), 4) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-3 \cos(t), -3 \sin(t), 0)\end{aligned}$$

Vypočtete (jednotkový) tečný vektor a (jednotkové) vektory normály a binormály v bodě $B = \vec{r}(2\pi)$.

16b Prostorová spirála má parametrické rovnice

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3 \cos(t), 3 \sin(t), e^{-2t})$$

Zderivováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-3 \sin(t), 3 \cos(t), -2e^{-2t}) \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = (-3 \cos(t), -3 \sin(t), 4e^{-2t})\end{aligned}$$

Vypočtete vektor normály v bodě $B = \vec{r}(0)$. Uveďte jakýkoliv nenulový násobek tohoto normálového vektoru, nemusíte ho normovat na jednotkovou velikost.